

Capitolul 0 Recapitulare

1) Aflarea c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.

Obs.: $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$

2) Număr prim

3) Numere prime între ele

4) Nr. raționale

$Q = \left\{ \frac{a}{b}; a, b \in Z, b \neq 0 \right\} \cup \{ \text{Fractii ce se pot scrie cu numar finit de zecimale} \}$

Exp. $a = 2,1234567891011... \notin Q$

$b = 2,1232323... = 2,1(23) \in Q$

Obs.2 : Număr irațional – fracție zecimală infinită și neperiodică

Obs.3 : $R \setminus Q$ – este mulțimea numerelor iraționale

Fracțiile zecimale sunt:

a) finite – au un număr finit de zecimale

b) infinite – au o infinitate de zecimale

Cele infinte se reîmpart în neperiodice-nu se repetă zecimalele
periodice-se repetă zecimalele

Cele periodice se împart în :

Periodice simple-nu apar cifre între virgulă și perioadă

Periodice mixte- apar cifre între virgulă și perioadă

Obs.4 : Transformări de fracții periodice- la numărător se scrie tot numărul din care se scade partea până la perioadă, iar la numitor se pun atâtea cifre de 9 câte are perioada și atâția de 0 câte cifre sunt între virgulă și perioadă

Exp $1,23(456) = \frac{123456-123}{99900} \rightarrow \text{mixta}$

$1, (23) = \frac{123-1}{99} \rightarrow \text{simpla}$

5) Mulțimi de numere $N \subset Z \subset Q \subset R$

6) ecuația de gradul II

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow x_{1,2} \notin R$$

7) Formulele utile : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \qquad (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \qquad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \text{ doar pentru } n \text{ impar}$$

Obs.: Triunghiul lui Pascal

9) Intervale de numere reale

$$\text{10) Modulul unui numar real: } |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \longrightarrow \text{dă semnul}$$

plus numarului, exprimă distanța de la număr până la origine

Obs.: Proprietati ale modulului: a) $|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

$$b) |a| < 2 \Leftrightarrow a \in (-2; 2); \qquad |a| > 2 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$$

$$|a| < -2 \Leftrightarrow a \in \emptyset \qquad |a| > -2 \Leftrightarrow a \in R$$

$$c) |a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|; \qquad d) |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \text{și} \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|};$$

$$\text{Exp.: } |2x - 1| \leq 3 \Leftrightarrow 2x - 1 \in (-3; 3) \Leftrightarrow 2x \in (-2; 4) \Leftrightarrow x \in (-1; 2)$$

11) Inegalitatea mediilor (valabila pentru numere pozitive):

$\min(a_k) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq \max(a_k)$ unde

$$m_h = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \text{ armonică} \qquad m_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \text{ geometrică}$$

$$m_a = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \text{ aritmetică} \quad m_p = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}} \text{ pătratică}$$

Obs:1: Egalitate are loc d.d.toate numerele sunt egale

Obs:2: Cea mai des folosita este $a_1 + \dots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$

Obs:3: De reținut cuvântul **ar_g_at**

12) Semnul suma \sum si semnul produs \prod , definiția factorialului

$$\text{exp: } \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n \quad \prod_{k=1}^n k^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot n^2$$

$$\text{Obs1: } \sum_{k=1}^n 1 = n \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Obs2: Constantele ies in fata sumei (respectiv produsului, in sa la produs la puterea n)

$$\sum_{k=1}^n 3k^2 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 \quad \prod_{k=1}^n 3k^2 = 3^n \prod_{k=1}^n k^2$$

Obs3: Daca in interiorul sumei este suma (respectiv la produs e produs), se distribuie suma (respectiv produsul).

$$\text{Exp } \sum_{k=1}^n (k^2 + k^3) = \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2$$

$$\prod_{k=1}^n k^5 = \prod_{k=1}^n (k^3 \cdot k^2) = \prod_{k=1}^n k^3 \cdot \prod_{k=1}^n k^2$$

Exp2.: Calculați suma $S = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2$

$$\text{Soluție: } S = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) =$$

$$\sum_{k=1}^n 4k^2 - \sum_{k=1}^n 4k + \sum_{k=1}^n 1 = 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$= n \cdot \frac{4n^2 - 1}{3}$$

Obs.4: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, operații cu factorial

13) Calcularea sumelor de tipul:

$$a) S_0 = 1^0 + 2^0 + \dots + n^0$$

$$b) S_1 = 1^1 + 2^1 + \dots + n^1$$

$$c) S_1 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$d) S_1 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

14) rezolvarea inecuațiilor de gradul I (2 metode)

15) deducerea semnului pentru inecuațiile de gradul II

16) rezolvarea inecuațiilor ce conțin produse sau rapoarte ale expresiilor de gr.I sau II

17) Aproximarea numerelor reale Exp: a=12,345

Aproximarea prin lipsa: 12; 12,3 ; 12,34 ; 12,345

Aproximarea prin adaos: 13 ; 12,4 ; 12,35 ; 12,346

Eroare absoluta : $\Delta_a = |a - \bar{a}|$, unde \bar{a} este aproximarea lui a;

18) Parte întregă - întregul mai mic sau egal decât numărul nostru, se noteaza $[x]$ (și este întregul din stânga numărului)

Parte fracționară : se noteaza $\{x\}$, $\{x\} = x - [x]$

Obs.: $\{x\} \in [0;1)$

Exp.: $[2,3] = 2$ și $[-2,3] = -3$

Obs.: Proprietati pentru parte intreaga si fractionara:

$$a) [x] = x \text{ d.d. } x \in \mathbb{Z}; \quad b) \{x\} = 0 \text{ d.d. } x \in \mathbb{Z};$$

$$c) [m+x] = m + [x], \forall m \in \mathbb{Z}; \quad d) \{m+x\} = \{x\}, \forall m \in \mathbb{Z};$$

$$e) x-1 < [x] \leq x < [x]+1; \quad c) [x+y] \neq [x]+[y]$$

19) ecuații cu parte întregă $[f(x)] = g(x)$

Etapă 1) notam $[f(x)] = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow g(x) = k$

Etapă 2) $g(x) = k \Rightarrow x = \dots$ in functie de k

Etapă 3) $[f(x)] \leq f(x) < [f(x)] + 1 \Rightarrow k \leq f(x) < k+1$

Etapă 4) inlocuim x in Etapa 2) \Rightarrow inecuație cu k

Etapă 5) se aleg din intervalul de solutii doar valorile întregi

20) Enunț, propoziție, predicat

Enunț—alăturare de simboluri, de semne matematice, de simboluri
Propoziție—un enunț despre care putem spune ca e adevărat sau fals
Predicat—un enunț ce depinde de variabile și care pentru diferite valori ale variabilelor devine propoziție

Valoare de adevăr, tabele de adevăr:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Obs. : numărul liniilor din tabel este egal cu 2^n , unde n este numărul propozițiilor care apar

Obs. $\neg p$ “non p” se completează invers decât la p

$p \vee q$ “p sau q” **disjunctie** e adevărată când sau p sau q e adevărată :

$p \wedge q$ “p și q” **conjunctie** e adevărată când și p și q e adevărată:

$p \rightarrow q$ “p implică q” **implicatie** e falsă când din adevărat se obține fals:

$p \leftrightarrow q$ “p echivalent cu q” e adevărată când și p și q au aceeași valoare de adevăr:

tautologie -propoziție identică adevărată

antilogie -propoziție identică falsă

predicată —enunțuri ce depind de variabile și care, pentru diferite valori ale variabilelor, devin propoziții

cuantificatorul existential : $\exists x a_i$

cuantificatorul universal: $\forall x \Rightarrow \dots$

Obs: cuantificatorii pot comuta doar dacă sunt de același tip:

$\exists x \exists y \leftrightarrow \exists y \exists x, \forall x \forall y \leftrightarrow \forall y \forall x$, dar $\exists x \forall y \leftrightarrow \forall y \exists x$ este falsă

21) Tipuri de teoreme :

a)teorema directă : $I \Rightarrow C$

b)teoreme reciproca: $C \Rightarrow I$

c)teorema contrară: $\neg C \Rightarrow \neg I$

d)teorema a reciprocei: $\neg I \Rightarrow \neg C$

Echivalența ($I \rightarrow C$) \leftrightarrow ($\neg C \rightarrow \neg I$)

Se arată (cu tabele) ca : ($I \Rightarrow C$) \leftrightarrow ($\neg C \Rightarrow \neg I$) și

($C \Rightarrow I$) \leftrightarrow ($\neg I \Rightarrow \neg C$) adărat de multe ori în loc să arătăm $I \Rightarrow C$, arătăm ca : $\neg C \Rightarrow \neg I$

22)Construcția lui P(k+1) dacă știm P(k):

E1)înlocuim pe k cu k+1 în P(k)

E2)Comparăm P(k) cu P(k+1) în funcție de :primul element , ultimul element, regula sirului;

E3)Adunăm, scădem,înmulțim,împartim pe P(k) astfel încât să pornească tot de unde porneste P(k+1) și să se oprească unde se oprește P(k+1);

23)Egalități demonstrate prin inducție:

I) P(prima valoare posibilă) adevărată

II) Presupunem P(k) adevărată (?) \Rightarrow P(k+1) adevărată, unde P(k):...

P(k+1):.....

Metoda I: Știm P(k) adevărată \Rightarrow ... adevărată apoi adun, scăd, înmulțesc sau împart astfel încât să obțin $M_s(P\{k+1\}) = \dots$ Se arată ... $M_d(P(k+1))$ prin calcule.

Metoda II: Vreau să arăt P(k+1) adevărată, echivalent cu

adevărată, echivalent cu....., echivalent cu... adevărată

Deoarece s-au folosit relații echivalente \Rightarrow P(k+1) adevărată \Rightarrow P(n) adevărată $\forall n \in N$

24)Inegalități demonstrate prin inducție

I)P(prima valoare posibilă) adevărată.

II)Presupunem ca P(k) adevărată \Rightarrow (?)P(k+1) adevărată ,unde :

P(k):...

P(k+1):...

Știm P(k) adevărată \Rightarrow apoi adun, scăd, înmulțesc sau împart astfel încât să obțin $M_s(P\{k+1\}) = \dots$ adevărată

$\Rightarrow M_s(P\{k+1\}) \geq \dots$

E suficient să arătăm ca... $> < M_d(P(k+1))$

25)Divizibilitate demonstrată prin inducție

I)P(prima valoare posibilă) adevărată

II)Presupunem P(k) adevărată \Rightarrow (?)P(k+1) adevărată, unde:

P(k):...

P(k+1):...

Stiu P(k) adevarata. \Rightarrow e divzibil cu $\alpha \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} a.i. = \alpha \cdot c$
 \Rightarrow scoatem cea mai mare putere a lui k in functie de c, o inlocuim
in P(k+1) \Rightarrow P(k+1) adevarata \Rightarrow P(n) adevarata, $\forall n \in \mathbb{N}$

26) Calculul unor sume prin metoda coeficientilor nedeterminati:

- E1) se scrie suma ca suma de termen general;
- E2) se descompune termenul general in fractii simple de numitori cunoscuti si numaratori necunoscutele A,B,C, etc.
- E3) se aduce M_d la acelasi numitor, egalam termenii liberi, coeficientii lui k, ai lui k^2 , etc \Rightarrow sistem;
- E4) Gasim coeficientii, gasim descompunerea, apoi dam valori lui $k=1, k=2, \dots$. Se aduna $\Rightarrow S = \dots$

Obs. In partea dreapta se reduc unii termeni

E5) Se demonstreaza suma prin inductie

Obs. Daca vrem inductie, se rescrie suma de termen general sub formă desfasurata pentru a ne fi mai simplu.

27) Probleme de numărare

Capitolul II

Șiruri de numere reale. Progresii

1) Moduri de definire a unui șir:

a) printr-o regulă de calcul;

Exp: $a_n = 2n + 1$

b) relație de recurență (se dă un termen în funcție de cei precedenți);

Ex: $x_0 = 2; x_{n+1} = 3 + x_n$ sau

$$x_0 = 1; \quad x_1 = 5; \quad x_{n+2} = 2x_n + x_{n+1} + 7;$$

Obs: \exists recurențe de ordinul 1, ordin 2, de ordin 3 etc.

2) Șir mărginit: $\exists m, M \in \mathbb{R}$ a.î. $m \leq x_n \leq M$.

Obs: \exists șiruri mărginite, inferior dar nemărginite superior, sau invers.

Șir nemărginit – este nemărginit la cel puțin un capăt

3) Șir monoton: $x_n m \uparrow: x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N};$

$$x_n m \downarrow: x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$x_n s \uparrow: x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$x_n s \downarrow: x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N};$$

Obs: monotonia se înțelege exact ca la funcții, $x_n m \uparrow$ dacă atunci când crește indicele, crește și valoarea șirului și $m \downarrow$ dacă atunci când crește indicele scade valoarea șirului.

Obs2: metoda practică de arătare a monotoniei

se compară diferența $a_{n+1} - a_n$ cu 0, iar dacă știm că are doar

termeni pozitivi putem compara și $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ cu 1.

4) Definiția progresiei aritmetice a_n - progresie aritmetică

$$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} \text{ a.î. } a_{n+1} = a_n + r.$$

Obs.: Metode de a demonstra că a_n este progresie aritmetică

met 1: $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n, \forall n \in \mathbb{N};$

met 2: E1) calculăm $a_2 - a_1 = r_1$

E2) calculăm $a_{n+1} - a_n = r_2$

E3) dacă $r_1 = r_2, \forall n \in \mathbb{N}$ atunci a_n este progresie aritmetică, iar dacă $r_1 \neq r_2$ atunci a_n nu este progresie aritmetică

5) Deducerea termenului general al unei progresii aritmetice:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

6) Deducerea sumei primilor n termeni ai unei progresii

aritmetice: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1) \cdot r] \cdot n}{2}$

Obs.: Se folosește proprietatea specifică a termenilor unei progresii aritmetice

Daca a_n progresie aritmetica atunci avem

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_p + a_{n-p+1}$$

Obs: reciproc nu este adevărat.

7) Verificarea dacă un șir e suma unei progresii aritmetice:

- E1) $a_1 = S_1$; E2) $a_2 = S_2 - S_1$;
 E3) Notăm $r_1 = a_2 - a_1$; E4) Calculăm $a_n = S_n - S_{n-1}$;
 E5) Din a_n găsim a_{n+1} , apoi calculăm $a_{n+1} - a_n = r_2$
 Daca $r_1 = r_2 \Rightarrow a_n$ este progresie aritmetică;
 Daca $r_1 \neq r_2 \Rightarrow a_n$ nu este progresie aritmetică.

8) Definiția progresiei geometrice: b_n progresie geometrică

$\Leftrightarrow \exists q \neq 0$ a.î. $b_n = b_{n-1} \cdot q$.
 Obs.: Metode de a demonstra că b_n este progresie geometrică

met 1: $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$;

met 2: E1) calculăm $\frac{b_2}{b_1} = q_1$

E2) calculăm $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q_2$

E3) dacă $q_1 = q_2, \forall n \in \mathbb{N}$ atunci b_n este progresie aritmetică, iar dacă $q_1 \neq q_2$ atunci b_n nu este progresie aritmetică

9) Deducerea termenului general al unei progresii geometrice:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

10) Proprietate specifică a termenilor

Dacă b_n este progresie geometrică atunci

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \dots = b_p \cdot b_{n-p+1}$$

11) Deducerea sumei primilor n termeni ai unei progr

geometrice: $S_n = \begin{cases} \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}; & \text{dacă } q \neq 1 \\ S_n = b_1 \cdot n; & \text{dacă } q = 1 \end{cases}$

12) Verificarea dacă un șir este suma unei progresii geometrice

folosim: E1) $b_1 = S_1$; E2) $b_2 = S_2 - S_1$;

E3) Notăm $q_1 = \frac{b_2}{b_1}$; E4) Calculăm $b_n = S_n - S_{n-1}$;

E5) Din b_n găsim b_{n+1} , apoi calculăm $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q_2$

Dacă $q_1 = q_2 \Rightarrow b_n$ este progresie geometrică;

Dacă $q_1 \neq q_2 \Rightarrow b_n$ nu este progresie geometrică.

13) Calcularea sumelor triunghiulare

$$S_n = 1 + 2 \cdot a + 3 \cdot a^2 + \dots + n \cdot a^{n-1}$$

E1) Se scrie suma sub formă triunghiulară

$$\begin{matrix} S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} + \\ a + a^2 + \dots + a^{n-1} + \\ a^2 + \dots + a^{n-1} + \\ \dots + \\ + a^{n-1} \end{matrix}$$

E2) fiecare rând e de fapt sumă de progresie geometrică

$$S_n = \frac{1 \cdot (a^n - 1)}{a - 1} + \frac{a \cdot (a^{n-1} - 1)}{a - 1} + \dots + \frac{a^{n-1} \cdot (a - 1)}{a - 1} =$$

și vom obține

$$\frac{n \cdot a^n - (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})}{a - 1} = \frac{n \cdot a^n - \frac{1 \cdot (a^n - 1)}{a - 1}}{a - 1}$$

**Capitolul III
Funcții**

1) Definiția funcției : $f : A \rightarrow B$ este funcție $\Leftrightarrow \forall x \in D_f, \hat{=}$

corespunde un unic $f(x) = y \in Cd_f$

2) Moduri de a defini o funcție :

diagrame, tabele sau analitic (prin formulă)

3) Egalitatea a 2 funcții:

Funcțiile f și g sunt egale $\begin{cases} D_f = D_g \\ Cd_f = Cd_g \\ f(x) = g(x), \forall x \in D_f \end{cases}$

Obs.: 2 funcții pot fie gale și dacă nu au aceeași formulă de definiție

4) numărul de funcții $f : A \rightarrow B$ este $(card B)^{card A}$

5) Restricția și prelungirea unei funcții:

Fie $f : A \rightarrow B$. Dacă $A' \subset A \Rightarrow f|_{A'}$ este restricția lui f la A'

$$\Leftrightarrow f_1 : A' \rightarrow B, f_1(x) = f(x)$$

Fie $f : A \rightarrow B$. Dacă $A \subset A'' \Rightarrow f_2$ este prelungirea lui f la A''

$$\Leftrightarrow f_2 : A'' \rightarrow B, f_2(x) = \begin{cases} f(x), x \in A \\ \dots, x \in A'' - A \end{cases}$$

Obs: Atât restricția cât și prelungirea unei funcții sunt egale cu funcția dată pe domeniul comun.

6) Funcții numerice – sunt funcții la care atât domeniul cât și codomeniul sunt submulțimi ale lui \mathbf{R}

7) Operații elementare cu funcții

- a) pentru funcții fără acolade se fac direct
- b) pentru funcții cu acolade, exprimăm funcții pe axă

8) Graficul unei funcții este $G_f = \{(x, f(x)) | x \in D_f\}$

Obs.: graficul unei funcții este de fapt o submulțime a produsului cartezian $D_f \times Cd_f$

9) reprezentarea geometrică a graficului (reprezentarea unui produs cartezian de mulțimi)

Capitolul IV Funcția de gradul I și funcția de gradul II

1) Funcție afină $f(x) = ax + b$

Obs. $a \neq 0 \Rightarrow$ funcție de gradul I
 $a = 0 \Rightarrow$ funcție constantă

$a \neq 0, b = 0 \Rightarrow$ funcție liniară

2) definiția funcției de gradul al doilea

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

3) Forma canonică a funcției de gradul II

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

Obs.: Poate dedusă prin formarea pătratului perfect

Obs.2: Trebuie deduse rădăcinile ecuației de gradul II

4) Trasarea $G_f, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

E1) $a > 0 \Rightarrow$ f are minim, și G_f va fi parabolă cu ramurile în sus

$a < 0 \Rightarrow$ f are maxim, și G_f va fi parabolă cu ramurile în jos

E2) $\cap OY : x = 0 \Rightarrow f(0) = \dots \Rightarrow A(0; \dots) \in G_f$

$\cap OX : f(x) = 0$ dacă

$\Delta > 0 \Rightarrow B(x_1, 0), C(x_2, 0) \in G_f$

$\Delta = 0 \Rightarrow B(x_1, 0) \in G_f$

$\Delta < 0 \Rightarrow G_f \cap OX = \emptyset$

E3) vârful $V \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a} \right)$

5) Studiarea monotoniei, determinarea punctului minim

(maxim) Pentru $a > 0 \Rightarrow f$ s \downarrow pe $\left(-\infty; \frac{-b}{2a} \right]$ și f s \uparrow $\left[\frac{-b}{2a}; \infty \right)$;

Pentru $a < 0 \Rightarrow f$ s \uparrow pe $\left(-\infty; \frac{-b}{2a} \right]$ și f s \downarrow $\left[\frac{-b}{2a}; \infty \right)$

Obs: $a > 0 \Rightarrow$ f are minim egal cu $\frac{-\Delta}{4a}$, se atinge pentru $x = \frac{-b}{2a}$, iar

pentru $a < 0$ f are maxim egal cu $\frac{-\Delta}{4a}$, se atinge pentru $x = \frac{-b}{2a}$,

6) Schema lui Horner - da catul și restul împărțirii unui polinom la polinoame de tipul $X - \alpha$ (respectiv $X + \alpha$);

Etapa 1) se face tabel de tipul

Etapa 2) Linia a III-a se completează astfel: primul coeficient se copiază, se înmulțește cu rezultatul, se adună în diagonală;

Etapa 3) ultimul rezultat este restul , iar celelalte sunt coeficientii catului , de grad cu 1 mai mic decat impartitorul ;

	Puterile lui x in ordine descrescatoare
	Coeficientii corespunzatori
α (pt $x - \alpha$) $-\alpha$ (pt $x + \alpha$)	

7) Inecuatii cu fractii de tipul $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ sau $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$

Etapa 1) se descompune numaratorul si numitorul in produs de factori de gradul I sau de gradul II (Nu se simplifica)

Etapa 2) se face tabel de semne , fiecare linie continand unul din factori, se separa zimtat numaratorul de numitor

Etapa 3)ultima linie se completea folosind : $\frac{0}{\alpha} = 0$; $\frac{\alpha}{0} = /$; $\frac{0}{0} = /$

si regula semnelor ;

Etapa 4) se alege x corespunzator , daca avem \leq respectiv \geq , se ia inchis in valoarea corespunzatoare lui 0 si deschis unde este / , iar pentru $<$ respectiv $>$ se iau doar intervale deschise

Obs : $\frac{P(x)}{Q(x)} < \alpha \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} - \alpha < 0$ se aduce la acelasi numitor

Obs.2 :Deducerea semnului funcției de gradul II, deducerea tabelului de semne Practic, folosim: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Etapa 1) se rezolva ecuatia $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ unde $\Delta = b^2 - 4ac$

Etapa 2) se alege linia corespunzatoare cazului nostru din tabelul

x	x_1	$x_1 = x_2$	x_2
$\Delta > 0$	$\text{sgn}(a)$	0	$-\text{sgn}(a)$ 0 $\text{sgn}(a)$
$\Delta = 0$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$
$\Delta < 0$	$\text{sgn}(a)$		

Observatie : Intre radacini e „- semnul lui a” pentru $\Delta > 0$, deci cand $\Delta = 0$ (respectiv $\Delta < 0$) nu are unde sa fie „- semnul lui a”

Obs. : Etapa 1) se calculeaza $D = \frac{D_{\text{termen liber}}}{D_{\text{coeficient dominant}}}$; unde D

este divizor

Etapa 2) se face schema lui Horner pentru $x - \alpha$, unde α este divizor , pana obtinem restul 0 , celelalte linii se taie.

Etapa 3) se scrie proba impartirii : Deimpartit = Impartitor · Cat + Rest

Etapa 4) Restul = 0 \Rightarrow Ecuatia devine $(x - \alpha) \cdot (\dots\dots\dots) = 0 \Rightarrow x = \alpha$ sau $\dots\dots\dots = 0$

Observatie : Daca cea de-a doua paranteza are gradul mai mare decat 2 , o descompunem din nou cu Horner,

8) Familii de parabole

a) Determinarea locului geometric pentru vârful unei familii de parabole

E1) Scriem coordonatele vârfulor $x_v = \frac{-b}{2a}$ $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

E2) Se găsește m din cea mai simplă, se înlocuiește în cealaltă.

E3) Se obține o relație între x_v și y_v care nu depinde de m \Rightarrow acea relație este locul geometric căutat.

E4) Se transpune locul geometric în figura corespunzătoare.

b) Determinarea punctelor fixe pentru o familie de parabole

E1) notăm $f(x) = y$, ordonăm în funcție de m

E2) obținem $m(\dots\dots\dots) + \dots = 0 \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\dots\dots\dots) = 0 \\ \dots\dots\dots = 0 \end{array} \right.$$

E3) se rezolvă sistemul $\Rightarrow x = \dots\dots y = \dots\dots$, aceste puncte sunt puncte fixe cerute

9) Folosirea semnului funcției de gradul II pt. a găsi min sau max unei expresii

Obs. distanța între 2 puncte

10)Situarea rădăcinilor unei ecuații față de parametrul reali, parametrul notați cu α, β, χ

E₁)Se scriu relațiile sub forma $\alpha < x_1 < \beta < x_2 < \chi$ (eventual \leq)

E₂) Se fac axele de coordonate, se situează numerele α, β, χ , se face G_f cu ramurile în sus (deci $a > 0$) deoarece condițiile vor fi același

E₃) Se pun condiții de tip:
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \\ a \cdot f(nr.) \\ -\frac{b}{2a} \end{array} \right.$$

E₄) Se rezolvă fiecare condiție, se intersectează intervalele.

Obs.1: **condiții de tip Δ**

$\Delta > 0$ dacă rădăcinile sunt distincte (sau apare cuvântul “ambele”)

$\Delta \geq 0$ dacă rădăcinile pot fi egale

$\Delta < 0$ dacă f nu are rădăcinile reale (sau dacă f păstrează semn constant)

Obs.2: **condiții de tip $a \cdot f(nr.)$**

Găsim semnul lui $f(nr.)$, deci semnul lui $a \cdot f(nr.)$ va fi același

Obs.: Dacă vreo rădăcină poate fi unul din numere, se pune

$a \cdot f(nr.)$ respectiv $a \cdot f(nr.) \geq 0$

Obs. 3 : **condiții de tip $-\frac{b}{2a}$** . Se pun doar pentru numere din afara

rădăcinilor și aceste condiții sunt $x_v < \text{număr} \Leftrightarrow \frac{-b}{2a} < \text{număr}$

sau $x_v > \text{număr} \Leftrightarrow \frac{-b}{2a} > \text{număr}$

GEOMETRIE

Capitolul 0 Recapitulare

1)Linii importante în triunghi(definiție, punct de intersecție, proprietăți) definitie, punct de intersecție, proprietati:

a)mediana-uneste varful triunghiului cu mijlocul laturii opuse,se intersecteaza in G -centru de greutate situat la 1/3 din baza si 2/3 din varf

b)inaltimea-perpendiculara din varf pe latura opusa,se intersecteaza in H-ortocentru (poate pica in afara triunghiului)

c)bisectoarea-imparte unghiul in doua parti egale,se intersecteaza in I-centrul cercului inscris

d)mediatoarea-perpendiculara pe mijlocul laturii,se intersecteaza in O-centrul cercului circumscris(poate sa nu treaca prin varf)

e)linia mijlocie-uneste mijloacele a doua laturi, e paralela cu a treia si este egala cu $\frac{1}{2}$ din baza

2) Triunghiul isoscel

3) Triunghiul echilateral

4) Paralelogramul

5) Dreptunghi

6) Cercul, patrulater inscrisibil

7) Cazuri de asemănare, Teorema fundamentală a asemănării, Teorema lui Thales

Capitolul 1 Vectori

1) Segment orientat, vector

Segment orientat -un segment pe care menținem o ordine a punctelor

Vector-orice reprezentant al mutimii segmentelor orientate paralele de acelasi sens si lungime

Obs.:Vectorul este diferit de segmentul orientat

Se noteaza, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ iar segmentul orientat \overline{AB} respectiv \vec{v} , desi in unele probleme se confundă

Obs.: Translație-se mută paralel fără a-l roti sau a-i modifica lungimea

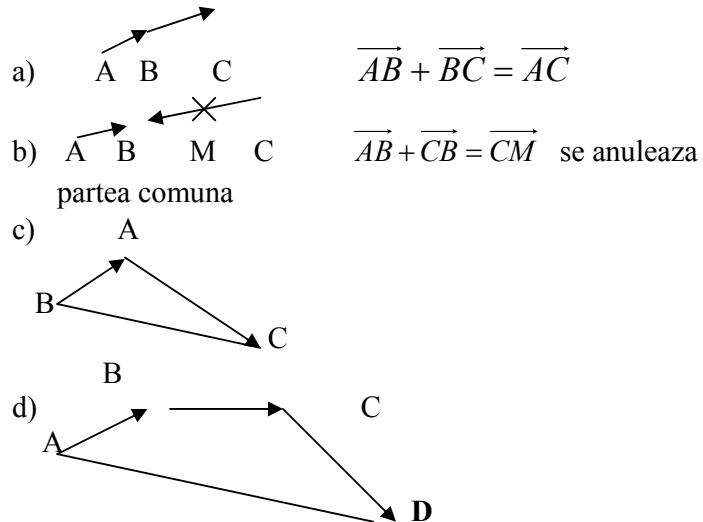
2.Egalitatea a doi vectori: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ daca si numai daca AB,CD au acelasi sens, aceeasi directie si aceeasi lungime

3.Suma a doi vectori-fortele care dau rezultanta, sunt de tipurile:

- a)coliniari,acelasi sens
- b)coliniari, sens opus
- c)necoliniari-regula triunghiului (regula poligonului)
-regula paralelogramului

Obs.2: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Exp:



4.Produsul unui vector cu un numar real: mareste sau micsoareaza, schimba sau pastreaza sensul

5. \overrightarrow{AM} mediana in triunghiul ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

6.ABCD paralelogram-daca si numai daca $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ sau $\forall M$

$\in P \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

7.G-centru de greutate pentru ABC daca si numai daca

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ sau

b) $\forall M \in P \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

8. Impartirea unui segment intr-un raport dat

Dacă $\frac{BM}{MC} = k \Rightarrow \forall A$ exterior avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+k} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k} \cdot \overrightarrow{AC}$

Obs. Relatia e adevarata nu doar daca A este exterior

9. Condiție de coliniaritate A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \exists a, b, c \in R$

astfel încât $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{0}, \forall M$ un punct din plan

10. Vector de poziție al unui punct

Fie O un punct fix...numit pol și M un punct oarecare al planului, vectorul de poziție al punctului M este $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_M$

Obs.: Vectorul de poziție e unic

Obs.: Exprimarea unui vector în funcție de vectorii de poziție ai capetelor segmentelor $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

Obs.: Vectorul de poziție al unui punct ce împarte un segment într-un raport dat

Dacă AB este un segment și M un punct interior astfel încât

$\frac{AM}{MB} = k$ atunci $\vec{r}_M = \frac{1}{1+k} \vec{r}_A + \frac{k}{1+k} \vec{r}_B$

Obs. Uneori relația se folosește sub forma

$\vec{r}_M = m\vec{r}_A + (1-m)\vec{r}_B, m \in (0,1)$

Obs.: Vectorul de poziție al punctelor importante într-un triunghi

$\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$ se poate generaliza pentru oricâte puncte

Obs.: Condiția de paralelogram

ABCD paralelogram $\Leftrightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$

Obs. : Condiția de coliniaritate a 3 puncte : Punctele A, B și M sunt

coliniare $\Leftrightarrow \vec{r}_M = \alpha\vec{r}_A + \beta\vec{r}_B$, unde $\alpha, \beta \in R, \alpha + \beta = 1$

11 . Teorema lui Thales

În ΔABC avem MN este paralelă cu dreapta BC $\Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

12. Teorema lui Menelaos: Fie triunghiul ABC si $C' \in AB, B' \in AC, A' \in BC$. Atunci: A', B', C' sunt coliniare

daca si numai daca $\frac{\overrightarrow{B'A}}{\overrightarrow{B'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{A'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'B}}{\overrightarrow{C'A}} = 1$

13. Teorema lui Ceva: Fie triunghiul ABC si $C' \in AB, B' \in AC, A' \in BC$. Atunci AA', BB', CC'

concurente daca si numai daca $\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1$

Obs.: Teorema lui Menelaos se foloseste pentru a arata coliniaritatea unor puncte, iar Teorema lui Ceva pentru concurenta unor drepte.

Capitolul 2 Trigonometrie

1) Proprietăți în triunghiul dreptunghic cu $m(A) = 90^\circ$

ΔABC drept $\Leftrightarrow AM = \frac{BC}{2}$, AM – mediana

T. lui Pitagora ΔABC drept $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

T. catetei ΔABC drept $\Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot BD$, unde BD este proiecția catetei AB pe ipotenuză

T. înălțimii ΔABC drept $\Leftrightarrow AD^2 = BD \cdot CD$

Centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei

Raza cercului circumscris este jumătate din ipotenuză

Ortocentrul este intersecția înălțimilor

Valori ale funcțiilor trigonometrice

$\sin = \frac{\text{cat.op}}{\text{ip}}$; $\cos = \frac{\text{cat.alat}}{\text{ip}}$; $tg = \frac{\text{cat.op}}{\text{cat.alat}}$; $ctg = \frac{\text{cat.alat}}{\text{cat.op}}$;

secanta unui unghi $\sec B = \frac{1}{\cos B}$,

cosecanta unui unghi $\text{cosec} B = \frac{1}{\sin B}$

$\sin(90^\circ - x) = \cos x$, $\cos(90^\circ - x) = \sin x$

Obs.: Rezolvarea triunghiului dreptunghic – gasirea tuturor elementelor daca stim doua dintre ele. Sunt cazurile:

a)(I; C) b)(I; U) c)(C; U_{alaturat}) d)(C; U_{opus}) e)(C; C)

2) Tabelul trigonometric

	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\
ctg	\	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
linie de constructie	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

E₁) in linia de constructie se pun cifrele de la 0 la 4

E₂) se extrage radical din fiecare

E₃) rezultatul se imparte la doi si se trece la sinus

3) Cercul trigonometric- este un cerc cu centrul în origine, de rază 1 parcurs în sens invers acelor de ceasornic în care considerăm dreptele: Ox → cos; Oy → sin; dreapta tangentă în A este tg, dreapta tangentă în B este ctg

Obs.: *Deducerea valorilor funcțiilor sin și cos din cerc*

se pot calcula doar dacă unghiurile au valoarea $axe + 0^\circ$, $axe + 30^\circ$, $axe + 45^\circ$, $axe + 60^\circ$

E1) Se considera unghiul orientat de la Ox

E2) Se duce proiectia pe Ox → cos si pe Oy → sin

E3) Lungimile corespunzătoare proiecției sunt valorile din tabelul trigonometric, dacă punctul e pe una din axe valoarea este 0 sau 1,

în rest valorile sunt $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

E4) Se alege semnul (referitor la cele patru cadrane) si lungimea proiectiei

Obs.: 1) perioada funcțiilor \sin și \cos dedusă din cerc

2) monotonia funcțiilor \sin și \cos dedusă din cerc

3) Deducerea valorilor funcțiilor tg și ctg din cerc

4) perioada funcțiilor tg și ctg dedusă din cerc

4) Echivalența grade ↔ radiani - se folosește regula de 3 simplă

$$180^\circ \dots \dots \dots \pi$$

$$\alpha^\circ \dots \dots \dots x$$

Dacă se știe α se găsește x , și dacă se știe x se găsește α

5) reducere la cercul trigonometric

Se da un unghi mai mare de 360° , se cere sa-l exprimam fata de valori ale unghiului din $[0; 2\pi)$

E1) Se scot întregii din fracție, se folosește $\frac{A}{B} = C + \frac{R}{B}$ unde C este

câtul împărțirii lui A la B, iar R este restul împărțirii

E2) Folosim periodicitatea funcțiilor \sin și \cos , adică

$$\sin x = \sin(x - 2k\pi), k \in Z, \cos x = \cos(x - 2k\pi), k \in Z \text{ și se obtine}$$

un unghi $\in [0; 2\pi)$

6. Reducerea la primul cadran

Suntem cu un unghi situat în cerc, dorim să îl aducem în primul cadran. Cum $\sin(x - k\pi) = \pm \sin x$, $\cos(x - k\pi) = \pm \cos x, k \in Z$, și

$$\sin\left(x \pm \frac{k\pi}{2}\right) = \pm \cos x, k \in Z \quad \cos\left(x \pm \frac{k\pi}{2}\right) = \pm \sin x, k \in Z \text{ observăm}$$

că nu putem folosi $\frac{\pi}{2} - t$ căci m-ar duce în funcție complementară.

Folosim așadar $\pi - t$, $t - \pi$ respectiv $2\pi - t$

Dacă suntem în Cd. II, dacă din π scădem unghiul obținem o valoare din Cd. I

Dacă suntem în Cd. III, dacă din unghi scădem π obținem o valoare din Cd. I

Dacă suntem în Cd. IV, dacă din 2π scădem unghiul obținem o valoare din Cd. I

Se deduc formulele de reducere

	Cd II	Cd III	Cd IV
cos	$-\cos(\pi - t)$	$-\cos(t - \pi)$	$\cos(2\pi - t)$
sin	$\sin(\pi - t)$	$-\sin(t - \pi)$	$-\sin(2\pi - t)$

Obs.: Semnele se aleg corespunzator cadranelor

7) Formule trigonometrice fundamentale

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

b) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Obs.: “cos” pastreaza functia, schimba semnul

c) $\sin(a + b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\sin(a - b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Obs.: “sin” schimba functia, pastreaza semnul

d) $tg(a + b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}$

$tg(a - b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}$

Obs.: “tg” la numarator pastreaza semnul, la numitor este schimbat

e) $ctg(a + b) = \frac{ctga \cdot ctgb - 1}{ctga + ctgb}$

$ctg(a - b) = \frac{ctga \cdot ctgb + 1}{ctga - ctgb}$

8) Deducerea formulelor trigonometrice pentru dublul unui unghi

a) $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$

c) $tg 2x = \frac{2 \cdot tgx}{1 - tg^2 x}$ d) $ctg 2x = \frac{(ctgx)^2 - 1}{2ctgx}$

Obs.: notăm $tg^2 x = (tgx)^2$, analog pentru celelalte;

Obs.2: $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

$\sin 3x = 4 \sin^3 x - 3 \sin x$

9) Transformarea produselor in sume

a) $\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b))$

b) $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$

c) $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$

obs: Se deduc prin verificarea lui $M\alpha$

10a) Trasarea graficului “sin”

a) $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$

b)



c) “sin” nu e bijectiva, alegem restrictia

$\overline{\sin} : [-\pi/2; \pi/2] \rightarrow [-1; 1]$

d) $\overline{\sin}$ inversabila, $\overline{\sin}^{-1}$ not arcsin \Rightarrow

$\text{arcsin} : [-1; 1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2]$

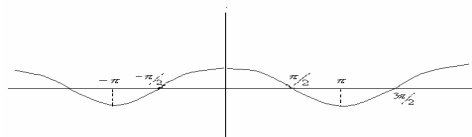
a) \sin_s crescatoare pe $[-\pi/2; \pi/2]$ si \sin_s descrescatoare pe

$[\pi/2; 3\pi/2]$

10b) Trasarea graficului “cos”

a) $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$

b)



c) “cos” nu e bijectiva, alegem $\overline{\cos} : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$

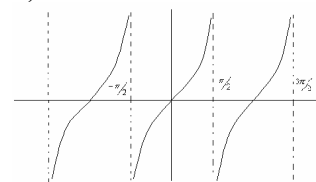
d) $\overline{\cos}^{-1}$ not arccos, arccos : $[-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$

e) \cos_s descrescatoare pe $[0; \pi]$ \cos_s crescatoare pe $[\pi; 2\pi]$

11a) Trasarea graficului “tg”

a) $\text{tg} : \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$

b)



c) “tg” nu e bijectiva, alegem restrictie $\overline{\text{tg}} : (-\pi/2; \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$

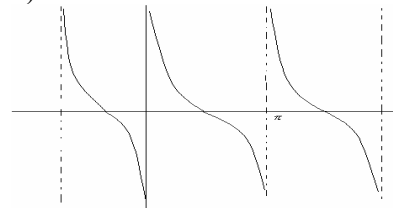
d) $\overline{\text{tg}}^{-1}$ not arctg, arctg : $\mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2; \pi/2)$

e) tg este strict crescatoare pe $(-\pi/2; \pi/2)$

11b) Trasarea graficului “ctg”

a) $\text{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi / k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$

b)



c) “ctg” nu e bijectiva, alegem $\overline{\text{ctg}} : (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}$

d) $\overline{\text{ctg}}^{-1}$ not arcctg, arcctg $\mathbb{R} \rightarrow (0; \pi)$

e) ctg strict descrescatoare pe $(0; \pi)$

Obs.: Graficul functiei si graficul arc.... sunt simetrice fata de prima bisectoare.

Obs.: asimptote

Obs.: 1) perioada funcțiilor sin și cos dedusă din cerc

- 2) monotonia funcțiilor \sin și \cos dedusă din cerc
 3) Deducerea valorilor funcțiilor tg și ctg din cerc
 4) perioada funcțiilor tg și ctg dedusă din cerc
 5) monotonia funcțiilor tg și ctg dedusă din cerc

12) Transformarea sumelor în produs

b) $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$
 c) $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$
 d) $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$
 e) $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

obs: $\sin \pm \sin = 2 \sin \dots \cos$ cu "sin" pastrand semnul, "cos" schimbându-l;
 $\cos + \cos = 2 \cos \cos$
 $\cos - \cos = -2 \sin \sin$

13) Produs scalar a doi vectori $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$, unde

$\angle(\vec{u}, \vec{v})$ este unghi orientat trigonometric

Obs.: Proprietăți ale produsului scalar:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v})$

c) $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

14) Demonstrarea concurenței înălțimilor unui triunghi folosind produsul scalar

15) Teorema cosinusului $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ și analogele.

Obs.: Expriarea $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ și analogele

16) Funcții trigonometrice ale unghiului pe jumătate

$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

$tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

$ctg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$

Obs: Se folosește $\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

17) relația lui Stewart Fie ΔABC și $D \in (BC)$. Atunci are loc relația $AB^2 \cdot DC - AD^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BD = BD \cdot DC \cdot BC$

18) teorema medianei: $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

19) Teorema sinusurilor

Oricare ar fi triunghiul ABC $\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

20) lungimea bisectoarea $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)}$