Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

VARA 2008

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 050

5p **1.** Fie fracția zecimală periodică $0,(769230)=0,a_1a_2a_3....$ Să se calculeze $a_1+a_2+a_3+....+a_{2008}$.

5p **2.** Să se arate că dreapta de ecuație $y=2x-1$ nu intersectează parabola de ecuație $y=x^2+x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2 x+\log_4 x^2=6$.

5p **4.** Într-o clasă sunt 25 de elevi dintre care 13 sunt fete. Să se determine numărul de moduri în care se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ și $D(a,4)$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine a pentru care dreptele AB și CD sunt perpendiculare.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ și că $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 088

1. Fie matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu X^t transpusa unei matrice pătratice X și cu $\operatorname{Tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X.

5p **a)** Să se demonstreze că $\operatorname{Tr}(A+A^t)=2\operatorname{Tr}(A)$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $\operatorname{Tr}(A\cdot A^t)=0$, atunci $A=O_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A\cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A)=0$.

2. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}$ și mulțimea $K=\{aI_2+bA \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$.

5p **a)** Să se arate că $A^2\in K$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea K este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $X\in K, X\neq O_2$ există $Y\in K$ astfel încât $XY=I_2$.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 076

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{n}\right)^n$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $(n+2)I_n=(n-1)I_{n-2}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică. VARA REZERVA 2008

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 075

5p **1.** Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ știind că $x(1+2i)+y(2-i)=4+3i$.

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(m-1, m^2-3m)$ să se afle în cadranul II.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3(\log_4(x^2-17))=1$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $\left(2\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^6$, $x>0$. Să se determine termenul independent de x.

5p **5.** Fie, în sistemul de coordonate xOy, punctele $A(4,-2)$, $B(2,4)$ și $C(m,n)$. Să se determine $m,n \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul C să fie centrul cercului circumscris triunghiului AOB.

5p **6.** Fie triunghiul ABC dreptunghic în A cu $AB=5$ și $BC=13$. Să se calculeze lungimea segmentului (BM), unde M este mijlocul segmentului (AC).

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 009

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze A^4.

5p **b)** Știind că matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relațiile $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B$ și $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B$, să se demonstreze că există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă pentru orice $X \in M_2(\mathbb{R})$, $A^n \cdot X = X \cdot A^n$, atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n=4k$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^4+aX^3+3X^2+bX+c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$.

5p **a)** Să se afle rădăcinile polinomului f știind că $a=b=0$, $c=-5$.

5p **b)** Să se verifice că

$$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2=\frac{3}{4}\left(a^2-16\right).$$

5p **c)** Pentru $a=4$, să se determine $b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să aibă toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 046

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se arate că f nu este derivabilă în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un parametru real.

5p **c)** Să se arate că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.

2. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x t\sin 2t\,dt$ și $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **b)** Să se arate că $g'(x)=-x\sin 2x, \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}, \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D   TOAMNA 2008

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) – Varianta 009

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -9$.

5p **2.** Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care ecuația $ax^2 + (3a-1)x + a + 3 = 0$ are soluții reale.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi]$ ecuația $\cos 4x = 1$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $f(1) = f(2)$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris într-un triunghi care are lungimile laturilor $13, 14, 15$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{\pi}{4}$. Să se demonstreze că $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 097

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se determine A^{-1}.

5p **c)** Să se arate că $(I_3 + A)^n = 2^{n-1}(I_3 + A), \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm polinomul $f_n = X^{3n} + 2X^2 - 4X - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se arate că f_1 nu este divizibil cu polinomul $g = X - 2$.

5p **b)** Să se determine suma coeficienților câtului împărțirii polinomului f_3 la $X - 1$.

5p **c)** Să se arate că restul împărțirii polinomului f_n la polinomul $h = X^2 + X + 1$ nu depinde de n.

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 087

1. Se consideră funcția $f : (0;\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = a^x - x^a, \ a > 0$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = a$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $f(x) \geq 0, \forall x > 0$, atunci $a = e$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq1}$, $I_n = \int_1^e \ln^n x \, dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n = e - nI_{n-1}, \forall n \geq 2$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geq1}$ este convergent.