Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

SESIUNE SPECIALA, 2009

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}$.

5p **2.** Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ştiind că graficul său şi graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-3x+3$ sunt simetrice faţă de dreapta $x=1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p **5.** Să se determine ecuaţia medianei duse din vârful A al triunghiului ABC, unde $A(1,2)$, $B(2,3)$ şi $C(2,-5)$.

5p **6.** Să se arate că $\operatorname{ctg} 2=\dfrac{\operatorname{ctg}1-\operatorname{tg}1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a,b,c,d>0$, matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ şi funcţia $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Se notează $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n\end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că dacă $\det A=0$, atunci f este funcţie constantă.

5p **b)** Să se arate că, dacă $\det A\neq 0$, atunci funcţia f este injectivă.

5p **c)** Să se arate că $\big(\underbrace{f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f}\big)(x)=\dfrac{a_n x+b_n}{c_n x+d_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\{I_2+aA+bB \mid a,b\in\mathbb{R}, a\neq -1\}$.

5p **a)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **b)** Să se arate că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că ecuaţia $X^2=I_2$ are o infinitate de soluţii în G.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţiile $f_n:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+\ln x$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcţiei f_1.

5p **b)** Să se demonstreze că funcţiile $g_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g_n(x)=f_n(x)+f_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sunt convexe.

5p **c)** Admitem că ecuaţia $f_n(x)=2^n$ are soluţia unică x_n. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ converge la 2.

2. Fie $a\in[0,1]$ şi $I_n=\displaystyle\int_0^a \frac{t^n}{t+1}\,dt$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n+I_{n-1}=\dfrac{a^n}{n}$, $\forall n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

VARA, 2009

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Să se calculeze $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ și $a<b<c$.

5p **5.** Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ și $2x+4y=11$.

5p **6.** Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ și $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Știind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluții (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} \middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii G.

5p **b)** Să se dea un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ și $\det A^2=\hat{0}$.

5p **c)** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, $X\in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=|\sin nx|$ și numărul $I_n=\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\pi} f_2(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le\ln 2$.

5p **c)** Să se arate că $I_n\ge\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

TOAMNA, 2009

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ este întreg.

5p **2.** Să se determine imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{-2x+1}=5$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulţimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=4$.

5p **5.** Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d:5x-4y+1=0$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB=6$, $B=\frac{\pi}{4}$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a-b)(a-1)$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A-A^t\right)$.

5p **c)** Să se arate că $\operatorname{rang} A\geq 2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+pX^2+qX+r$, cu $p,q,r\in(0,\infty)$ şi cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ în funcţie de p, q şi r.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă a,b,c sunt trei numere reale astfel încât $a+b+c<0$, $ab+bc+ca>0$ şi $abc<0$, atunci $a,b,c\in(-\infty,0)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se demonstreze că funcţia f este bijectivă.

5p **c)** Să se arate că graficul funcţiei f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}\left(1-\{x\}\right)$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ nu depinde de numărul real a.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică. TOAMNA REZERVA, 2009
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \ldots$.

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=(3-m^2)x+3$, să fie strict crescătoare.

5p **3.** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea *M* a tuturor funcțiilor definite pe $A=\{1,2,3\}$ cu valori în $B=\{5,6,7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea *M*, aceasta să fie injectivă .

5p **5.** Se consideră punctul *G*, centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Prin punctul *G* se duce paralela la *AB* care intersectează dreapta *BC* în punctul *P*. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{GP}=m\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 2\alpha$, știind că $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $p, q, r \in \mathbb{C}$, se consideră sistemul $\begin{cases} x+py+p^2z=p^3 \\ x+qy+q^2z=q^3 \\ x+ry+r^2z=r^3 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(p-q)(q-r)(r-p)$.

5p **b)** Dacă *p*, *q*, *r* sunt distincte, să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se arate că, dacă sistemul are soluția $(-1,1,1)$, atunci cel puțin două dintre numerele p, q, r sunt egale.

2. Se consideră inelul $(A,+,\cdot)$ unde $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \ a,b \in \mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *A*.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea *A* ecuația $X^2=I_2$.

5p **c)** Să se arate că $(A,+,\cdot)$ nu este corp.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+a}{x^2-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^x$.

5p **b)** Să se determine valoarea numărului *a* știind că 3 este punct de extrem local al funcției *f*.

5p **c)** Să se determine valoarea numărului *a* știind că graficul funcției *f* are exact o asimptotă verticală.

2. Se consideră funcția $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=1$ și, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $f_1^2(x)=2f_2(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:[0,\pi]\to[0,\pi]$, $g(x)=f_1(x)\sin x$ în jurul axei Ox.