INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

SIMULAREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2010

Matematică *M_mate-info*

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Să se calculeze modulul numărului $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\cos\frac{\pi}{4}\right)^{2010}$
2. Se consider funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x+1$. Să se determine imaginea funcției f
3. Să se rezolve ecuația $\log_2 x+\log_8 x=8$
4. Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[3]{3}\right)^{36}$
5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că vectorii $\vec{u}=5\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\vec{v}=m\vec{i}+4\vec{j}$ sunt perpendiculari
6. Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\cos x=\frac{1}{4}+\sin x$. Să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. În $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricile $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, precum şi mulțimea $H=\left\{X(a)\middle|a\in\mathbb{R}, X(a)=I_2+aA\right\}$
   a) Să se arate că $I_2\in H$.
   b) Să se arate că $X(a)X(b)=X(a+b+ab),\forall X(a),X(b)\in H$
   c) Să se arate că $X(1)X(2).....X(2010)=X(2011!-1)$
2. Se consideră cunoscut că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este un inel comutativ unde $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=xy-3x-3y+12,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$
   a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție "$\circ$"
   b) Determinați $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z},*,\circ)$ şi $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=ax+b$
   c) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 2010 ori}}=2^{2010}+3$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}$.
   a) Calculați $f'(x)$ b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}$ c) Să se demonstreze că $f(x)\geq 0,\forall x\geq 0$
2. Se consider ă şirul $(I_n)_{n\geq 1}$
   a) Calculați I_1.
   b) Arătați că $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător
   c) Arătați că $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi calculați limita sa.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010

Proba E c)

TOAMNA, 2010

Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 6

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Care dintre numerele $2\sqrt[3]{6}$ şi $3\sqrt[3]{3}$ este mai mare?

5p **2.** Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$.

5p **3.** Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $x^2-x+m^2=0$ are două soluţii reale egale.

5p **4.** Determinaţi numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{41}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(-2,3)$, $C(1,-3)$ şi $D(4,a)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB şi CD să fie paralele.

5p **6.** Fie mulţimea $A=\left\{0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\}$. Care este probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea A, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $\sin^3 x+\cos^3 x=1$?

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $B_n=A^n+A^{n+1}+A^{n+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $A^{2010}=a^{670}\cdot I_3$.

5p **b)** Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(B_1)=0$.

5p **c)** Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate matricele B_n, $n\in\mathbb{N}^*$ sunt inversabile.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=2xy-3x-3y+m$, $m\in\mathbb{R}$. Fie mulţimea $M=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

5p **a)** Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*y\in M$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Pentru $m=6$ arătaţi că $(M,*)$ este grup.

5p **c)** Pentru $m=6$, demonstraţi că funcţia $f:M\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=2x-3$ este un izomorfism între grupurile $(M,*)$ şi $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}$.

5p **a)** Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale la graficul funcţiei f spre $+\infty$.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{-\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{\sqrt[3]{2n}}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $I_1+I_2+I_3$.

5p **b)** Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

VARA, 2010

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\left((1-i)(i-1)\right)^4$.

5p **2.** Arătați că funcția $f:(-3,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$ este impară.

5p **3.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2+2x-8<0$.

5p **4.** Câte elemente din mulțimea $A=\{1,2,3,...,100\}$ sunt divizibile cu 4 sau cu 5?

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $M(1,-2)$, $N(-3,-1)$ şi $P(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=6,\ AC=3$ şi $BC=5$. Calculați lungimea înălțimii $[AD]$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Fie sistemul $\begin{cases} x-2y-8z=-65\\ 3x+y-3z=22\\ x+y+z=28\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -8\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că rangul matricei A este egal cu 2.

5p **b)** Rezolvați sistemul în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numărul soluțiilor sistemului din mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Determinați numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Arătați că există o matrice nenulă $M\in A$ astfel încât $\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{1}\\ -\hat{1} & \hat{3}\end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea A ecuația $X^2=I_2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Studiați monotonia funcției *f*.

5p **c)** Determinați punctele de inflexiune ale funcției *f*.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{2x-1}{x}dx$.

5p **a)** Arătați că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este strict crescător.

5p **b)** Arătați că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este mărginit.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2-I_n)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
VARA REZERVA, 2010
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 10

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $i\sqrt{2}-1$ este soluție a ecuației $z^2+2z+3=0$.

5p **2.** Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+a$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-a$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(f\circ g)(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x+1}=x+1$.

5p **4.** Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\left\{1, 3^3, 3^6, 3^9, ..., 3^{2010}\right\}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,5)$, $B(-2,5)$ şi $C(6,-3)$. Scrieți ecuația medianei corespunzătoare laturii $[BC]$, în triunghiul ABC.

5p **6.** Calculați $\sin\frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2ay+z=-1 \\ 2ax+y+(a+1)z=0 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi a este parametru real.

5p **a)** Rezolvați sistemul pentru $a=0$.
5p **b)** Verificați dacă pentru $a=-1$ sistemul este compatibil.
5p **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

2. Fie $m,n\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^3-3X^2+mX-n$ care are rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Determinați valorile reale m şi n pentru care $x_1=2+i$.

5p **b)** Determinați valorile reale m şi n pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $(X-1)^2$ este egal cu 0.

5p **c)** Arătați că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale şi $m>0$, $n>0$, atunci x_1,x_2,x_3 sunt strict pozitive.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică pentru graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **b)** Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x=-2$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\cos x}{2-\cos^2 x}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Calculați $\int_0^{2\pi} x\cdot f(x)dx$.