Examenul de bacalaureat 2012
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x+1|\le 24\}$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a dreptei $y=2x-1$ cu parabola $y=2x^2-3x+1$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\sqrt[3]{1+7x}=1+x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,\ldots,10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale mulțimii *A*, submulțimi care conțin exact 2 numere impare.

5p **5.** Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$, unde $A(1,-2)$ şi $B(3,4)$.

5p **6.** Ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos 2x=\frac{1}{3}$, calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+my+m^2z=0 \\ mx+m^2y+z=0 \\ m^2x+y+mz=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați valorile lui *m* pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

5p **b)** Arătați că, pentru nicio valoare a lui m, sistemul nu are o soluție (x_0,y_0,z_0) cu x_0,y_0,z_0 numere reale strict pozitive.

5p **c)** Arătați că rangul matricei sistemului este diferit de 2, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}(x+y-xy+1)$.

5p **a)** Verificați dacă legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Rezolvați ecuația $x*x*x=3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x+2$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(-x)}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția *f* este descrescătoare pe intervalul $[-1,1]$.

5p **c)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$.

5p **a)** Calculați I_2.

5p **b)** Demonstrați că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, pentru orice $n\ge2$.

SIMULAREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2012

Matematică *M_mate-info*

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Să se ordoneze descrescător numerele $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+mx+1$. Găsiți valorile reale ale parametrului m astfel încât vârful parabolei să fie în cadranul IV.
3. Rezolvați în numere reale ecuația: $16^x+3\cdot 4^x=4$
4. Calculați $C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6$
5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2,-1)$, $A(1,2)$ și $B(4,1)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.
6. Rezolvați în intervalul $[-\pi,0)$ ecuația $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $B=I_3+A$.
   a) Să se verifice că $A^2=10A.$.
   b) Să se arate că matricea B este inversabilă şi inversa sa este matricea $B^{-1}=I_3-\left(\frac{1}{11}\right)A$
   c) Să se găseasca trei matrici $U,V,W\in M_3(C)$ de rang 1, astfel încât $B=U+V+W$.
2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=x+y+xy$.
   a) Să se arate că legea "$*$" este asociativă.
   b) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$. Să se verifice relația $f(x*y)=f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$
   c) Să se calculeze $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{2013}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$. Notăm prin $f^{(n)}(x)$, derivata de ordinul n a funcției f, în punctul *x*.
   a) Arătați că $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$
   b) Câte puncte de maxim local are funcția f în intervalul $[-\pi,3\pi]$?
   c) Care este lungimea maximă a unui interval inclus în $[0,2\pi]$ pe care funcția f este convexă?

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{3+\cos x}$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x f(t)dt.$

a) Să se verifice că $f(x+2\pi)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

VARA REZERVA, 2012

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați partea reală a numărului complex $(1+2i)^2$.

5p **2.** Se notează cu x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2-3x+a=0$, unde a este un număr real. Determinați a pentru care $x_1+x_2+x_1x_2=5$.

5p **3.** Se notează cu g inversa funcției bijective $f:(0,+\infty)\to(4,+\infty)$, $f(x)=2^x+3$. Determinați $g(5)$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile lui A, aceasta să conțină exact trei elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ şi $B(7,12)$. Determinați coordonatele punctului M, ştiind că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ştiind că $\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x}=3$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se notează cu $D(a,b,c)$ determinatul matricei $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2a & 2b & 2c\\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $D(0,1,-1)$.

5p **b)** Determinați numerele reale *x* pentru care matricea $A(0,1,x)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi şi $D(a,b,c)=0$, atunci triunghiul este isoscel.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ şi funcția $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5$, $f(x)=x^3+\hat{2}x^2+\hat{4}x+\hat{3}$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{1})+f(\hat{3})$.

5p **b)** Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $P=X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **c)** Arătați că funcția f nu este surjectivă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)\sqrt{x^2+3}=\frac{3-9x}{x^2+3}$, pentru orice număr real *x*.

5p **b)** Determinați asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Determinați imaginea funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x-x$ este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției *f*, axa *Ox* şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.

5p **c)** Arătați că $(p+1)\int_1^x f^p(t)dt+\int_1^x f^{p+1}(t)dt=xf^{p+1}(x)$, pentru orice $x\ge 1$ şi orice $p>0$.

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

VARA, 2012

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $(1+i)^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x-2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $2^{x+1}\le 4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ şi $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+y+3z=0\\ x+2y+3z=0\\ x+y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** În cazul $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0>0$ şi $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi mulțimea $G=\left\{X(p)=I_2+pA \,\middle|\, p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Arătați că $X(p)\cdot X(q)\in G$, pentru orice $X(p),\ X(q)\in G$.

5p **b)** Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

5p **c)** Rezolvați ecuația $(X(p))^3=I_2+7A$, unde $X(p)\in G$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

5p **a)** Arătați că funcția este crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}$.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x)=a$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_x^{2x}f(t)\,dt}{x}$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c) SESIUNEA SPECIALA, 2012

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real m știind că mulțimile $A=\{2\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+mx+4=0\right\}$ sunt egale.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3^{\log_3 x}<1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de 2 cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}+(2a-3)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=AC=5$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați $\det\left(A(\pi)\right)$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(A(x)\right)^{2012}=I_3$.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $e=\dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **b)** Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n=\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$ și $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Calculați J_1.

5p **b)** Calculați I_1.

5p **c)** Demonstrați că $J_{2n}-J_{2n+2}=I_{2n}$ pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

TOAMNA, 2012

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)+\log_2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=2$.

5p **2.** Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x+4$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}=4$.

5p **4.** Determinați rangul termenului care conține x^{14} în dezvoltarea binomului $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, $x>0$.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și este paralelă cu dreapta d de ecuație $3x+2y-1=0$.

5p **6.** Determinați măsura unghiului C al triunghiului ABC, știind că $BC=2$, $AB=\sqrt{2}$ și măsura unghiului BAC este egală cu 45°.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}-x+ay+(2a+4)z=1\\(a+2)x+ay+(a+1)z=1\\(a+1)x+(2a-1)y+3z=2\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $3a^3+9a^2-3a-9$.
5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.
5p **c)** Pentru $a=-2$, rezolvați sistemul.

2. Se consideră polinomul $f=X^8+\hat{4}X^4+\hat{3}$, $f\in\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Arătați că $a^5=a$, pentru orice $a\in\mathbb{Z}_5$.
5p **b)** Arătați că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.
5p **c)** Arătați că polinomul f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$.
5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real $m>0$, ecuația $f(x)=m$ are o soluție unică în $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul p, se consideră numărul $I_p=\int_0^1 x^p e^{x^2}dx$.

5p **a)** Calculați I_1.
5p **b)** Arătați că $2I_p+(p-1)I_{p-2}=e$, pentru orice $p\geq 3$.
5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)$.