Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 4-6i$. Arătați că numărul $z_1z_2 + 2z_1 + z_2$ este real.
5p	**2.** Calculați $(f \circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(x^2-4\right)=\log_5(5x-8)$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 7.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=3x-2017$ și punctul $A(1,0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
5p	**6.** Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det\left(A(2)\right)$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det\left(A(x)+B(x)\right)=\det\left(B(x)\right)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numerele naturale n și p, știind că $A(n)B(p)=B(3)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+8X+3$, unde a este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real a, știind că $f(1)=0$.
5p	**b)** Pentru $a=6$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+5X+3.
5p	**c)** Demonstrați că, dacă $a\in(-4,4)$, atunci polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2018}+2018x+2$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,2020)$ aparține tangentei la graficul funcției f care trece prin punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}dx$.
5p	**a)** Calculați $\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx$.
5p	**b)** Demonstrați că $I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.
5p	**c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{5}$.

Simularea examenului de bacalaureat național 2017
Proba E. c) - 26.01.2017
M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 puncte)

5p 1. Calculați modulul numărului complex z, unde $z=\frac{2i}{3-4i}$.

5p 2. Determinați $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, astfel încât parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m+2)x^2-2mx+1$ să intersecteze axa Ox în două puncte distincte.

5p 3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3^2 x-2\log_3 x-3=0$.

5p 4. Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $M=\{0,1,2,3,4\}$.

5p 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele M,N,P mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Demonstrați că $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile $A(-2,3),\ B(2,2),\ C(3,4)$. Determinați ecuația înălțimii din A.

Subiectul II (30 puncte)

1. Fie $m\in\mathbb{R}$, sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y-z=0\\ 2x+m^2y-z=0\\ -2x-3y+3z=m-1\end{cases}$ și A matricea sistemului.

5p a) Calculați $\det(A)$.

5p b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

5p c) Pentru $m=1$, arătați că $E=\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{x_0^2-2y_0^2+3z_0^2}$ este constantă, pentru orice soluție nebanală (x_0,y_0,z_0) a sistemului.

2. Fie mulțimea $G=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1-2a & a\\ -6a & 1+3a\end{pmatrix},\ a\in(-1,\infty)\right\}$.

5p a) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

5p b) Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

5p c) Calculați $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -6 & 4\end{pmatrix}^{2017}$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\ln(x+1)$.

5p a) Demonstrați că $x\ge\ln(x+1),\ \forall x\in(-1,\infty)$.

5p b) Determinați asimptotele graficului funcției.

5p c) Fie șirul $(x_n)_{n\ge0}$ defininit prin $x_0>0,\ x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se definește $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{(x+1)^2}dx$.

5p a) Calculați I_0.

5p b) Demonstrați că $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

SIMULAREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2017

IAȘI, MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați $x \in \mathbb{N}$ pentru care numerele $1-x$, x^2, $x+7$ sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = m^2x + 2$, $g(x) = 4x + m$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care imaginile geometrice ale graficelor funcțiilor f și g sunt două drepte paralele.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ inecuația: $\left(\sqrt{2}-1\right)^{4x} < 3 - 2\sqrt{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca un număr din mulțimea $\left\{\log_2 n \,/\, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 10\right\}$ să fie rațional.

5p **5.** Determinați $a \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(2,3)$, $B(0,-2)$ și $C(1,a)$ să fie coliniare.

5p **6.** Găsiți valorile lui $x \in (0, \pi)$ pentru care: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră mulțimea $M_A = \left\{mI_2 + nA \middle| m, n \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Arătați că $A^2 = aI_2 + bA$.

5p **b)** Demonstrați că M_A este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea.

5p **c)** Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, demonstrați că $XA = AX$ dacă și numai dacă $X \in M_A$.

2. Se consideră mulțimea $A = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a - b \in \mathbb{Z}\right\}$ pe care definim operația asociativă $(a,b) * (c,d) = (ac + bd, ad + bc)$.

5p **a)** Demonstrați că $(\forall)(a,b), (c,d) \in A, (a,b) * (c,d) \in A$.

5p **b)** Găsiți elementul neutru al operației „$*$".

5p **c)** Determinați $x, y \in A \setminus \left\{(0,0)\right\}$ cu proprietatea că $x * y = (0,0)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} \ln(x+1)$

5p **a)** Calculați $\int \frac{1}{\ln(x+1)} f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că $G : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$ este o primitivă a funcției $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 f(x)$.

5p **c)** Găsiți primitiva F a funcției $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 f(x)$ care se anulează în $x = 1$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : (-2, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$ și $F(x) = \frac{-2x-1}{(x-1)(x+2)}$.

5p **a)** Calculați $\int \left(f(x) - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx$.

5p **b)** Arătați că F este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinați primitivele G_c ale prelungirii funcției f la mulțimea $D = (-2,1) \cup (1, +\infty)$, dacă $G_c(-1) = G_c(2)$.