Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 3$ şi $a_3 = 7$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p **2.** Determinați numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+3)=2$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi care are 5 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Calculați distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=8$, $AC=8$ şi $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Calculați $\det(I_3+B)$.

5p **b)** Demonstrați că $f(A)=I_3+B$.

5p **c)** Arătați că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$, unde $(f(A))^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x=x*x$.

5p **b)** Determinați numărul întreg a care are proprietatea că $x\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p **c)** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases}x*(y+1)=4\\(x-y)\circ 1=5\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$.

5p **a)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

MODEL PENTRU SIMULAREA PROBEI DE MATEMATICĂ DIN CADRUL EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2013 LA NIVELUL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI
01 FEBRUARIE 2010
SUBIECT

M2-ştiinţe ale naturii pentru filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p 1. Calculaţi $\log_3 \frac{1}{27} + \sqrt[5]{32}$.

5p 2. Se consideră funcţia $f:\{-1,0,1\} \to \mathbb{R}, f(x) = -x+1$. Determinaţi mulţimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \{-1,0,1\}\}$.

5p 3. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3 = 11$ şi $a_7 = 27$. Determinaţi a_9.

5p 4. Arătaţi că numărul $\frac{2012!}{(1006!)^2}$ este natural.

5p 5. Pe axa OX se consideră punctele $A(2;0)$ şi $B(m^2;0)$, unde m este un număr real. Determinaţi valorile lui m pentru care punctul $C(9;0)$ este mijlocul segmentului AB.

5p 6. Calculaţi $\sin 75^\circ - \cos 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Se notează $D(a)$ determinantul matricei $M(a)$.

5p a) Calculaţi $(M(1))^2$;

5p b) Calculaţi valoarea determinantului $D(a)$ pentru $a = -2$;

5p c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $D(a) \leq 0$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = -xy + 2x + 2y - 2$.

5p a) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x * 4 = 0$.

5p b) Demonstraţi că $x * y = -(x-2)(y-2) + 2$, oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

5p c) Ştiind că legea de compoziţie „*" este asociativă, rezolvaţi în $\mathbb{R}$, ecuaţia $x * x * x = x$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2012} + 2012^x + 2012$.

5p a) Calculaţi $f'(x)$.

5p b) Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p c) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$.

2. Se consideră funcţiile $f, F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-2)e^x$ şi $F(x) = (x-a)e^x + 2e$, $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Determinaţi valoarea constantei a pentru care funcţia F este o primitivă a funcţiei f;

5p b) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$;

5p c) Pentru $a = 3$, calculaţi $\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{x-1}$.

TOAMNA, 2010

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $-1 \le \frac{x+1}{3} \le 1$.

5p **2.** Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $A(0,0), B(2,2), C(-1,2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3) - \log_2 x = 2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un element n din mulțimea $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n \ge n^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,0), B(1,-1), O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 6$ și $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Verificați dacă $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **c)** Rezolvați ecuația $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^3 + \hat{2}X^2$ și mulțimea $G = \left\{ g = aX^3 + bX^2 + cX + d \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{1})$.

5p **b)** Determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul elementelor mulțimii G.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

5p **a)** Demonstrați că $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x+1}$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $[0,1]$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{2}{e} \le \frac{1}{f(x)} \le 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, \text{ pentru } x \ge 1 \\ 2x, \text{ pentru } x < 1 \end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

5p **c)** Calculați $\int_1^{\sqrt{6}} x \cdot f(x)\,dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2+2x-5$. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care abscisa vârfului parabolei asociate funcţiei *f* este egală cu 2.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{1-x^2}=\frac{1}{27}$.

5p **4.** Calculaţi $C_6^2-A_4^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,-2)$ şi $B(6,8)$. Calculaţi distanţa de la punctul O la mijlocul segmentului (AB).

5p **6.** Calculaţi $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ m & 0 & 2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-y-z=-2\\ x+3y-z=-2\\ mx+2z=4\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculaţi determinantul matricei A.

5p **b)** Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea A este inversabilă.

5p **c)** Rezolvaţi sistemul pentru $m=-1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.

5p **a)** Demonstraţi că $x\circ y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi elementul neutru al legii „$\circ$”.

5p **c)** Daţi exemplu de două numere $a,b\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ pentru care $a\circ b\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei *f* în punctul $A(1,2)$.

5p **c)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n\ln x$.

5p **a)** Calculaţi $\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{f_1(x)}dx$.

5p **b)** Demonstraţi că primitivele funcţiei f_1 sunt convexe pe intervalul $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

5p **c)** Calculaţi $\int_1^e\frac{f_{2009}(x)}{x^{2010}}dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27}$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.

5p **4.** Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w}=2\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$.

5p **6.** Un triunghi dreptunghic are catetele $AB=3,\ AC=4$. Determinați lungimea înălțimii duse din *A*.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați A^2-A.

5p **b)** Determinați inversa matricei *A*.

5p **c)** Rezolvați ecuația $A\cdot X=\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix},\ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3[X],\ f=X^2+X,\ g=X^2+\hat{2}X+a$, cu $a\in\mathbb{Z}_3$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.

5p **b)** Determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})$, pentru oricare $a\in\mathbb{Z}_3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2\cdot e^x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția *f* este descrescătoare pe intervalul $[-2,0]$.

5p **c)** Demonstrați că $0\le f(x)+f(x^2)\le\frac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x\in[-1,0]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox* a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$.

5p **c)** Calculați $\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Probă scrisă la matematică - Proba E c)

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ în care $a_3 = 5$ şi $a_5 = 11$. Calculaţi suma primilor şapte termeni ai progresiei.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x + 3$. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor *f* şi *g*.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$.

5p **4.** Calculaţi $a \cdot b$ ştiind că $a + b = 150$ şi numărul *a* reprezintă 25% din numărul *b*.

5p **5.** Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$ şi $C(m+1, m^2)$ sunt coliniare.

5p **6.** Calculaţi $\cos x$, ştiind că $\sin x = \frac{1}{3}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $m \in \mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculaţi determinantul matricei *A*.
5p **b)** Rezolvaţi sistemul pentru $m = 0$.
5p **c)** Verificaţi dacă sistemul este incompatibil pentru $m = 1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x * y = (x-4)(y-4) + 4$.

5p **a)** Demonstraţi că legea „$*$” este asociativă.
5p **b)** Demonstraţi că $x * y \in (4, +\infty)$, oricare ar fi $x, y \in (4, +\infty)$.
5p **c)** Calculaţi $1 * 2 * 3 * \ldots * 2010$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$.
5p **b)** Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei *f* în punctul $A(2,5)$.
5p **c)** Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei *f*.

2. Se consideră funcţiile $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ şi $g(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$.

5p **a)** Demonstraţi că funcţia *g* este o primitivă a funcţiei *f*.
5p **b)** Calculaţi $\int_1^4 f(x)\,dx$.
5p **c)** Calculaţi $\int_1^{e^2} 2^{g(x)} \cdot f(x)\,dx$.