Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2=6$ şi $a_3=5$. Calculaţi a_6.

5p **2.** Determinaţi soluţiile întregi ale inecuaţiei $2x^2-x-3\leq 0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x+2)-\log_3(x-4)=1$.

5p **4.** După o scumpire cu 5%, preţul unui produs creşte cu 12 lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$ şi $B(5,0)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$.

5p **6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $BC=9$ şi $m(\sphericalangle BAC)=120^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x & y\\ 1 & x+1 & y+1\end{vmatrix}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculaţi $D(-1,1)$.

5p **b)** Determinaţi $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $D(x,2010)=1$.

5p **c)** Demonstraţi că $D(x,y)\cdot D(x,-y)=D(x^2,y^2)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{Z}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Arătaţi că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că legea „$*$" este asociativă.

5p **c)** Calculaţi $1*2*...*2011$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2+x+3^x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(0)$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătaţi că $a^3+a^2+a-b^3-b^2-b\leq 3^b-3^a$, oricare ar fi numerele reale a, b cu $a\leq b$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcţia $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n e^x$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x}dx$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 f_1(x)dx$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_0^1 f_n(x^2)dx\geq \frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p 1. Calculați $\log_6 3+\log_6 12$.

5p 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2-x+3$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^x+7^{x+1}=392$.

5p 4. Determinați $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2=4A_n^1$.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-2)$ şi $B(4,m)$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care $AB=5$.

5p 6. Calculați $\cos 40^\circ+\cos 140^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1\\ 1 & m & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații $\begin{cases} mx-y+z=0\\ x+my-z=0\\ x-2y+z=0\end{cases}$, unde m este parametru real.

5p a) Calculați determinantul matricei A.

5p b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care tripletul $(-1,2,5)$ este o soluție a sistemului.

5p c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul admite doar soluția $(0,0,0)$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=xy+x+y$.

5p a) Arătați că legea „$*$” este asociativă.

5p b) Determinați elementul neutru al legii „$*$”.

5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2*2=x*4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)^2}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{-x-5}{(x-1)^3}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p c) Arătați că $f(x)+\dfrac{1}{12}\geq 0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,1)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}, & x>1\\ \dfrac{x-1}{x}, & 0<x\leq 1\end{cases}$.

5p a) Calculați $\displaystyle\int_2^e \frac{f(x)}{\ln x}dx$.

5p b) Fie $g:(0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$. Determinați primitiva funcției g, primitivă al cărei grafic conține punctul $A(1,5)$.

5p c) Calculați $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{e} f(x)dx$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1$, $x+1$ și $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}=x-3$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.

5p **5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x-y-6=0$ și $d_2: -x+2y-6=0$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului *M* al triunghiului *MNP*, știind că $MN=4$, $MP=5$ și $NP=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculați A^2-3A.

5p **b)** Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+3ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Arătați că $X(a)$ este matrice inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

2. Polinomul $f=X^3+2X^2-5X+m$, cu $m\in\mathbb{R}$ are rădăcinile x_1, x_2 și x_3.

5p **a)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$.

5p **c)** Arătați că determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_2&x_3&x_1\\x_3&x_1&x_2\end{vmatrix}$ este număr natural, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Arătați că $f(x)>0$, oricare ar fi $x\in[1,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că graficul funcției *f* nu admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+10}$.

5p **a)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă *F* a funcției *f* este crescătoare pe mulțimea $\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-10}^{10} f(x)\,dx=2\int_{0}^{10} f(x)\,dx$.

VARA REZERVA, 2011

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$. Determinați numerele reale a şi b pentru care graficul funcției f conține punctele $A(2,3)$ şi $B(-1,0)$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $3^x+3^{x+1}=36$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{10,11,12,\ldots,99\}$, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,-1)$ şi $N(-1,3)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

5p **6.** Determinați lungimea laturii unui triunghi echilateral, care are aria egală cu $4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră punctele $A_n\left(2^n,3^n\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Demonstrați că punctele A_1, A_2, A_3 nu sunt coliniare.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este egală cu 216.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{2}(xy-x-y+3)$.

5p **a)** Verificați dacă elementul neutru al legii „$\circ$” este $e=3$.

5p **b)** Determinați simetricul elementului 2 în raport cu legea „$\circ$”.

5p **c)** Arătați că mulțimea $H=\{2k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+e^x$.

5p **a)** Arătați că $xf'(x)=1+xe^x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x+1$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$.

5p **c)** Demonstrați că, oricare ar fi $a\geq 2$, are loc inegalitatea $\int_0^a f(x)dx\geq 3a^2+2$.