

**Examenul de bacalaureat 2012**  
**Proba E. c)**  
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Model**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Într-o progresie aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  se cunosc  $a_1 = 5$  și  $r = 2$ . Calculați suma primilor 5 termeni ai progresiei.
- 5p** 2. Determinați numărul real  $m$  pentru care ecuația  $x^2 - (m+1)x + m = 0$  are soluții reale egale.
- 5p** 3. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^{x+1} - 1$  cu axele  $Ox$  și respectiv  $Oy$ .
- 5p** 4. Calculați  $2C_4^2 - 3A_4^1$ .
- 5p** 5. Se consideră vectorii  $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + a\vec{j}$  și  $\vec{v}_2 = (a+3)\vec{i} + 2\vec{j}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ . Determinați numărul  $a > 0$  pentru care vectorii  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  sunt coliniari.
- 5p** 6. Aria triunghiului  $MNP$  este egală cu 16, iar  $MN = NP = 8$ . Calculați  $\sin N$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A_n(n-1, n+2)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** a) Determinați ecuația dreptei  $A_1A_2$ .
- 5p** b) Demonstrați că punctele  $A_m, A_n, A_p$  sunt coliniare, oricare ar fi  $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** c) Pentru fiecare  $p \in \mathbb{N}^*$  notăm  $M_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid A_nA_p \leq 2\}$ . Determinați elementele mulțimii  $M_{2011}$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 + (m-3)X^2 - 17X + (2m+7)$ , cu  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Pentru  $m = 4$  determinați câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la  $X - 3$ .
- 5p** b) Determinați  $m \in \mathbb{R}$  pentru care polinomul  $f$  este divizibil cu  $X - 1$ .
- 5p** c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{-4}{x^2+1}, & x \leq 0 \\ x-4, & x > 0 \end{cases}$ .
- 5p** a) Demonstrați că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0 = 0$ .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{16-x^2}$ .
- 5p** c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(-1, -2)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_m(x) = 3m^2x^2 + 6mx + 9$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Determinați mulțimea primitivelor funcției  $f_0$ .
- 5p** b) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției  $f_1$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = 1$ .
- 5p** c) Calculați  $\int_1^2 \frac{f_2(x) - 9}{x} \cdot e^x dx$ .

SIMULAREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2012  
Matematică  $M_{\text{științele naturii}}$

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră progresia aritmetică de rație 2 cu  $a_3 + a_4 = 8$ . Să se determine  $a_1$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4x + 9$ . Să se arate că vârful parabolei asociate funcției  $f$  se află pe dreapta  $x + y = 7$ .
3. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\lg x + \lg(9 - 2x) = 1$ .
4. Să se calculeze  $C_{100}^3 - C_{100}^{97}$ .
5. Se consideră vectorii  $\vec{v}_1 = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$  și  $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j}$  cu  $a \in \mathbb{R}$ . Să se determine valorile lui  $a$  pentru care vectorii  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  sunt coliniari.
6. Fie  $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , astfel încât  $\sin a = \frac{4}{5}$ . Să se calculeze  $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .
  - a. Să se calculeze  $\det(A)$ .
  - b. Să se demonstreze că  $A^2 - A - 2I_3 = O_3$ .
  - c. Să se determine  $A^{-1}$ .
2. Se consideră  $a \in \mathbb{R}$  și ecuația  $x^3 - x + a = 0$  cu rădăcinile complexe  $x_1, x_2, x_3$ .
  - a) Să se rezolve ecuația dacă  $a = -6$ .
  - b) Să se calculeze  $x_1 x_2 x_3$ .
  - c) Să se determine valorile lui  $a$  pentru care  $x_1, x_2, x_3$  sunt numere întregi.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$ .
  - a. Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
  - b. Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
  - c. Să se determine mulțimea valorilor lui  $f$ .
2. Se consideră șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$ ,  $I_n = \int \frac{nx^n + (n-1)}{x^{n+1}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - a) Arătați că  $\frac{nx^n + (n-1)}{x^{n+1}} = \frac{n}{x} + \frac{n-1}{x^{n+1}}$ .
  - b) Să se calculeze  $I_1$ .
  - c) Să se calculeze  $I_2$ .

**Examenul de bacalaureat 2012**  
**Proba E.c)**  
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Varianta 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii*

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Ordonăți crescător numerele  $\sqrt{12}$ ,  $2\sqrt{2}$  și 3.
- 5p** 2. Rezolvați sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ .
- 5p** 3. Se consideră funcțiile  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_2(x+1)$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow (-1, +\infty)$ ,  $g(x) = 2^x - 1$ .  
Calculați  $f(g(1))$ .
- 5p** 4. Numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi este egal cu 10. Determinați numărul elementelor mulțimii.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $O(0,0)$ ,  $A(5,1)$ ,  $B(3,5)$ . Calculați lungimea medianei din vârful  $O$  în triunghiul  $OAB$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $MNP$  cu  $MP = 6$ ,  $\sin N = \frac{3}{5}$  și  $\sin P = \frac{4}{5}$ . Calculați lungimea laturii ( $MN$ ).

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații  $\begin{cases} mx - 2y + z = 1 \\ 2x - my - 3z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Arătați că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei sistemului este egală cu 2.
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui  $m$  pentru care matricea sistemului are determinantul diferit de zero.
- 5p** c) Pentru  $m = 1$ , arătați că  $y_1^2 = x_1 \cdot z_1$ , unde  $(x_1, y_1, z_1)$  este soluția sistemului.
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Pentru  $m = 0$ , calculați restul împărțirii polinomului  $f$  la  $X - 1$ .
- 5p** b) Arătați că polinomul  $f$  este divizibil cu  $X + 1$ , pentru orice număr real  $m$ .
- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui  $m$  pentru care polinomul  $f$  are trei rădăcini reale.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{10x}{(x^2 + 2)^2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$ , pentru orice  $x \in [0, 1]$ .
2. Pentru fiecare număr natural nenul  $n$  se consideră numărul  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$ .
- 5p** a) Calculați  $I_1$ .
- 5p** b) Arătați că  $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\frac{1}{4026} \leq I_{2012} \leq \frac{1}{2013}$ .

**Examenul de bacalaureat 2012**

**Proba E.c)**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Varianta 5**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii*

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că  $2^{-1} + 2^{-2} = 0,75$ .
- 5p 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația  $\frac{2}{x-3} < 0$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x+2} = x+2$ .
- 5p 4. La o bancă a fost depusă într-un depozit suma de 900 lei cu o dobândă de  $p\%$  pe an. Calculați  $p$ , știind că, după un an, în depozit suma este de 1008 lei.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $O(0,0)$  și  $A(2,3)$ . Determinați coordonatele punctului  $B$ , știind că  $A$  este mijlocul segmentului  $(OB)$ .
- 5p 6. Determinați măsura  $x$  a unui unghi ascuțit, știind că  $\frac{\sin x + 4 \cos x}{\cos x} = 5$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $H(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , cu  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p a) Arătați că  $\det(H(x)) = 1$ , pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$ ,  $a > 0$ , astfel încât  $H(x) \cdot H(a) = H(x)$ , pentru orice  $x > 0$ .
- 5p c) Calculați determinantul matricei  $H(1) + H(2) + \dots + H(2012)$ .
2. În  $\mathbb{R}[X]$  se consideră polinomul  $f = X^3 + 3X^2 - 3X - 1$ , cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3$ .
- 5p a) Arătați că polinomul  $f$  se divide cu  $X - 1$ .
- 5p b) Calculați  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .
- 5p c) Verificați dacă  $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = 13$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ .
- 5p a) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 0$ .
- 5p b) Demonstrați că funcția  $f$  este crescătoare pe intervalul  $(4, +\infty)$ .
- 5p c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$ .
- 5p a) Arătați că funcția  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = xe^x - e^x + 2012$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p b) Calculați  $\int_1^e f(\ln x) dx$ .
- 5p c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$  a graficului funcției  $g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ .

**Examenul de bacalaureat 2012**

**Proba E.c)**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Varianta 7**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii*

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Într-o progresie aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  se cunosc  $a_4 = 7$  și  $a_9 = 22$ . Calculați  $a_{14}$ .
- 5p** 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 3$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 5 - x$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{3-x} = \frac{1}{4}$ .
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii  $M = \{0, 1, 2, 3\}$ .
- 5p** 5. Într-un reper cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1, 2)$  și  $B(3, 0)$ . Determinați coordonatele simetricului punctului  $A$  față de punctul  $B$ .
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii  $BC$  a triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 6$ ,  $AC = 5$  și  $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații 
$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$
, unde  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Calculați determinantul matricei asociate sistemului.
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care matricea asociată sistemului este inversabilă.
- 5p** c) Pentru  $a = 0$ , rezolvați sistemul de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = x + y - 1$ .
- 5p** a) Arătați că  $x * 1 = x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $x * x * x = 4$ .
- 5p** c) Determinați numărul natural  $n$ ,  $n \geq 2$ , pentru care  $C_n^1 * C_n^2 = 14$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x}{x+1}$  pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Arătați că funcția  $f$  este descrescătoare pe  $(0, +\infty)$ .
- 5p** c) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{e^{2x} \cdot f^2(x)}{x}$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2012} + x^{2011} + x^2 + x$ .
- 5p** a) Determinați primitiva  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f$ , care verifică relația  $F(0) = 1$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx$ .
- 5p** c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) - x^{2012} - x^{2011}$ .

**Examenul de bacalaureat 2012**

**Proba E.c)**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Varianta 9**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii*

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Se consideră numărul  $a = \log_3 2$ . Arătați că  $\log_3 6 = 1 + a$ .
- 5p** 2. Determinați numărul real  $m$ , știind că punctul  $A(0,1)$  aparține graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $f(x) = x^2 - 2x + m - 3$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x+1) - \log_2(x+3) = -1$ .
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ , acesta să fie divizibil cu 7.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctul  $A(4, -1)$ . Determinați coordonatele punctului  $B$ , știind că  $O$  este mijlocul segmentului  $(AB)$ .
- 5p** 6. Calculați cosinusul unghiului  $A$  al triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 5$ ,  $AC = 6$  și  $BC = 7$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + ay + 3z = 1 \\ 4x + a^2y + 9z = 1 \end{cases}$$
, unde  $a \in \mathbb{R}$  și se notează cu  $A$  matricea sistemului.
- 5p** a) Arătați că  $\det A = -a^2 + 5a - 6$ .
- 5p** b) Determinați valorile reale ale numărului  $a$  pentru care matricea  $A$  este inversabilă.
- 5p** c) Pentru  $a = 1$ , rezolvați sistemul.
2. În  $\mathbb{Z}_5[X]$  se consideră polinomul  $f = mX^5 + nX$ , cu  $m, n \in \mathbb{Z}_5$ .
- 5p** a) Determinați  $n \in \mathbb{Z}_5$  pentru care  $f(\hat{1}) = m$ .
- 5p** b) Pentru  $m = \hat{1}$  și  $n = \hat{4}$ , determinați rădăcinile din  $\mathbb{Z}_5$  ale polinomului  $f$ .
- 5p** c) Arătați că, dacă  $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$ , atunci  $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$ .
- 5p** a) Calculați  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot \ln x}{x^2 - x - 1}$ .
- 5p** c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x+1}$ .
- 5p** a) Determinați primitivele funcției  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_1^2 \sqrt{x+1} \cdot f(x) dx$ .
- 5p** c) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției  $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = e^{-x} \cdot f(x)$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 2$  și  $x = 3$ .