Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge 1}$ cu termeni reali, ştiind că $b_2 = 1$ şi $b_5 = 8$.

5p **2.** Calculaţi $(f \circ f)(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 7$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_5(x-3) = \log_5(x-1)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 50\}$, acesta să fie număr divizibil cu 11.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ şi $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Rezolvaţi în mulţimea $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ecuaţia $2\sin x - 1 = 0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A \cdot B = B \cdot A$.

5p **b)** Verificaţi dacă $\det(A+B) > \det A + \det B$.

5p **c)** Determinaţi numărul matricelor $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ pentru care $X^2 = A$, unde a şi b sunt numere reale.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 + X + a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a = -2$, arătaţi că $f(1) = 0$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = 2$.

5p **c)** Pentru $a \ne 0$, determinaţi un polinom de grad trei, având coeficienţii reali, care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ şi $\frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia f este descrescătoare.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1 (x+2) f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{2013}^{2014} \left(f(x) + (x+2) f'(x)\right) dx = 1$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{f(x)}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Simulare pentru elevii clasei a XI-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi numărul real x știind că numerele 4, 36 și x sunt în progresie geometrică.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a pentru care $(f\circ f)(x)=x$ pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{-x+2}=\sqrt{3}$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu cel mult 3 elemente ale mulţimii $M=\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,-3)$ și dreapta $d:2x+y-5=0$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Calculați $\sin 2x$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(0,2)$, $B(3,5)$ şi $C(6,8)$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţia dreptei AC.

5p **b)** Verificaţi dacă punctele A, B şi C sunt coliniare.

5p **c)** Demonstraţi că aria triunghiului AOB este egală cu aria triunghiului BOC.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $2A+2B$.

5p **b)** Arătați că $(A-B)\cdot(B-A)=-8I_2$.

5p **c)** Determinaţi matricea $X=\begin{pmatrix}a&b\\1&3\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A\cdot X=X\cdot B$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x}{x+e}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to e} f(x)$.

5p **b)** Arătaţi că dreapta de ecuaţie $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-6, & x\le 2\\ x^2-a, & x>2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinaţi numărul real a ştiind că funcţia f este continuă în punctul $x=2$.

5p **b)** Pentru $a=8$, rezolvați ecuația $f(x)=0$.

5p **c)** Pentru $a=8$, stabiliți semnul funcţiei f.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați conjugatul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x-5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3-\sqrt{x^2+3}=x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(4,0)$ și $C(2,0)$. Determinați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$ pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Calculați $D(1,0)$.

5p **b)** Arătați că $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$ pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că numărul $D(m,n)$ este par pentru orice numere întregi m și n.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.

5p **a)** Rezolvați în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{3}x+\hat{2}=\hat{5}$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$, $f(x)=x^3-x$.

5p **c)** Determinați numărul elementelor mulțimii $H=\{x^{10} \mid x\in\mathbb{Z}_6\}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq 1$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e (x+1)f(x)\ln x\,dx$.

5p **c)** Arătați că $F(e-1)=\dfrac{e^2-4e+7}{2}$, unde $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(0)=1$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=3+2(1-i)$.
5p	**2.** Arătați că $x_1+x_2+2x_1x_2=23$ știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-3x+10=0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+x+1}=1$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3\}$.
5p	**5.** Determinaţi numărul real a pentru care dreptele de ecuații $y=(a-1)x+1$ și $y=2x-3$ sunt paralele.
5p	**6.** Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculaţi $\det(A(2))$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	**c)** Arătați că $\det(A(1)+A(2)+\cdots+A(n))=\dfrac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4(x+y-3)-xy$.
5p	**a)** Calculaţi $2*4$.
5p	**b)** Arătați că $x*y=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+1$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$.
5p	**b)** Arătați că $f'(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**c)** Arătați că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8x+15}$.
5p	**a)** Arătați că $\int\limits_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)\,dx=2014$.
5p	**b)** Arătați că $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\dfrac{1}{144}$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a>0$ ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$, are aria egală cu $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{10}{9}$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Calculați z^2.

5p **2.** Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $M(m,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-3)=2$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu număr impar de elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În dreptunghiul $ABCD$ se notează cu M mijlocul laturii AD. Arătați că $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Arătați că $\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det A$.

5p **b)** Arătați că $A+A\cdot A=2014I_2$.

5p **c)** Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A\cdot X=2014\,I_2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+mX-6$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Arătați că $\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_1x_3}+\dfrac{1}{x_2x_3}=1$ ştiind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinaţi numărul real m știind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi punctele de extrem ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\ln 2$.

5p **b)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe intervalul $(-1,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$, are aria mai mare sau egală cu $\ln 4$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real x pentru care numerele 2, $x+2$ și 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-10$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-2x\right)=3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie par.

5p **5.** Determinați numărul real *a* pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ sunt opuși.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det B$.

5p **b)** Arătați că $AB=BA$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(B+xA)=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4(x+y-5)$.

5p **a)** Calculați $4*5$.

5p **b)** Arătați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1*2*3*\cdots*2014$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{12x}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(-1,1)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_1^e f(x)\cdot f'(x)\,dx=\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int\limits_1^e x^3 f(x)\,dx=\dfrac{3e^4+1}{16}$.

5p **c)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=2+3i$. Calculaţi z^2.

5p **2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_9\left(x^2+5\right)=1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0)$, $B(2,0)$ şi $C(0,3)$. Calculaţi aria triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1\\ 1-a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det\left(A(1)\right)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a ştiind că $\det\left(A(a)\right)=1$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2xy-3x-3y+6$.

5p **a)** Calculați $1\circ 2$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty,2)$.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\le -\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(-\infty,2)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2 (x+1)f(x)\,dx=2\ln 2-1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^e \left(f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx=1$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[2,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\ln x}{f(x)}$.