Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge 1}$, ştiind că $a_1 = 3$ şi raţia $r = 2$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ şi $C(-2,5)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, ştiind că M este mijlocul segmentului BC.
5p	**6.** Calculaţi $\operatorname{ctg} a$, ştiind că $\sin a = \frac{1}{3}$ şi $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculaţi $\det(A(3))$.
5p	**b)** Arătaţi că $A(-2015) + A(2015) = 2A(0)$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = x^2$.
	2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + aX$, unde $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ şi $a \in \mathbb{Z}_5$.
5p	**a)** Calculaţi $f(\hat{0})$.
5p	**b)** Determinaţi $a \in \mathbb{Z}_5$, ştiind că $f(\hat{3}) = \hat{3}$.
5p	**c)** Arătaţi că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
	2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.
5p	**a)** Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)dx$.
5p	**b)** Arătaţi că $\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{4}{3} - \ln 2$.
5p	**c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, are aria egală cu $\frac{1}{2} + \ln(n^2 + n)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați a_{2015}, știind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu $a_1 = 2015$ și $r = -1$.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(2,-3)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu 2 elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 9\}$, aceasta să fie formată doar din pătrate perfecte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-2)$ şi $C(1,2)$. Determinaţi coordonatele punctului B, ştiind că patrulaterul $OABC$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 3\sqrt{3}$ și $BD = 6$. Calculaţi aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ 2 & x-1 & 7-x \\ 1 & -2 & x^2 \end{vmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $D(1)$.

5p **b)** Arătaţi că $D(x) = -(x-1)(x+1)(x+2)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D\left(2^x - 3\right) = 0$.

2. Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+3a & -6a \\ a & 1-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $X(-1) + X(1) = 2X(0)$.

5p **b)** Arătaţi că $X(a)\cdot X(b) = X(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care matricea $X(a)$ este inversabilă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-4}{x-2}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 3, & x \leq -1 \\ 2x^3 + (a-3)x - 4, & x > -1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă în $x = -1$.

5p **b)** Arătaţi că $f(x) + 2 \leq 0$, pentru orice $x \leq -1$.

5p **c)** Pentru $a = -1$, arătaţi că ecuația $f(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[0,2]$.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați numărul real care are partea întreagă -2 și partea fracționară $0,75$.
5p	**2.** Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{4}{3}x+4$ cu axa Ox și, respectiv, cu axa Oy.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+10}=81$.
5p	**4.** Determinați numărul natural n pentru care $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=64$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,1)$, $N(3,1)$ și $P(3,5)$. Arătați că triunghiul MNP este isoscel.
5p	**6.** Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC, știind că $AB=6$, $AC=8$ și $BC=10$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x,a)=\begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$, unde x și a sunt numere reale.
5p	**a)** Calculați $\det(A(2,0))$.
5p	**b)** Arătați că $A(x,a)+A(x,-a)=2x\,A(1,0)$, pentru orice numere reale x și a.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(x,-3))=0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.
5p	**a)** Arătați că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numerele întregi a și b, știind că $a\circ b=2$.
5p	**c)** Calculați $(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-e^x+1$.
5p	**a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$.
5p	**a)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.
5p	**b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(-1)=1$.
5p	**c)** Arătați că pentru orice număr real nenul a are loc relația $\int_0^a f(x)\,dx+\frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx=a^4-1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, ştiind că $a_1=1$ şi raţia $r=2$.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(m,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+4\right)=\log_2 8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** Determinaţi numărul real a, ştiind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătaţi că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ştiind că $\sin x=\frac{1}{2}$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $A(2014)+A(2016)=2A(2015)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a pentru care $\det\left(A(a)\right)=0$.

5p **c)** Rezolvaţi în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A(2)+xA(3)\right)=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy-x-y-2$.

5p **a)** Arătaţi că $(-1)*1=-1$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=-(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+2)*(2x-3)=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-8x^2+16$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=4x(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2+1}$.

5p **c)** Determinaţi coordonatele punctelor situate pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2 x f(x)dx=\frac{7}{2}$.

5p **b)** Demonstraţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x+2\ln x+2015$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(f(x)-1\right)\ln x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + i$ și $z_2 = 3 - i$. Arătați că numărul $z_1 z_2$ este real.

5p **2.** Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(1,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + 2x - 4} = x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 80\}$, acesta să fie divizibil cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ și $B(2,a)$. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 4$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $A(1) + A(3) = a\,A(2)$.

5p **c)** Arătați că $A(x)A(y) = 2A(x+y) + xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$.

5p **a)** Arătați că $2 * (-2) = -2$.

5p **b)** Arătați că $x * y = 3(x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = (x+2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $[-3, +\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1) f(x)\,dx = 0$.

5p **b)** Arătați că $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \ln 2$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m, $m > 0$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = m$, are aria egală cu $\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $(2-3i)(2+3i)$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Calculați $f(f(3))$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2+17)=\log_3 81$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,a)$, $B(3,2)$ și $C(2,1)$. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.
5p	**6.** Se consideră $E(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 2a & 4\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $A(2)\cdot X=A(8)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.
5p	**a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.
5p	**b)** Arătați că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Calculați $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3e^x+x^2$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi ca funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=4$.
5p	**b)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x dx=e^2$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$, are aria egală cu $4+\ln a$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $z^2-2i=0$.

5p **2.** Calculați $(g\circ f)(3)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2015$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-5x}=5^{3-3x}$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu patru elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=2x+7$.

5p **6.** Determinaţi aria triunghiului MNP, ştiind că $MN=12$, $MP=3$ și $m(\sphericalangle M)=30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale a, pentru care $\det\left(A(a)\right)=0$.

5p **c)** Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b)+abI_2$, pentru orice numere reale a și b, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=2$.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g=X^2+X-2$ este egal cu 0.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

5p **b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **c)** Demonstrați că $e^x\ge x+1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+2x-5\right)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{f(x)}dx\le\dfrac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=6$ și $a_4=8$.

5p **2.** Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-9$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+3}=x+1$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(0,3)$. Determinaţi ecuația dreptei AB.

5p **6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=8$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det\left(B(x)+I_2\right)=8$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-7x-7y+56$.

5p **a)** Arătați că $(-7)*7=7$.

5p **b)** Arătați că $x*y=(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculaţi $1*2*3*\dots*2015$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\ln x+x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$.

5p **b)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătați că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=\frac{3}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=-\frac{1}{2}+\ln 2$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.