Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că $b_5 = 48$ și $b_8 = 384$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-7x+6$. Determinați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $32^x = 16\cdot 2^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr natural n din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice egalitatea $n^2-5n+6=0$.

5p **5.** Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătați că $(2\sin x+\cos x)^2+(\sin x+2\cos x)^2-4\sin 2x=5$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&x\\y&0\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(2A)=-28$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y, știind că $A+2B=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Dacă $AB=BA$, arătați că $\det B\le 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 1=-1$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numerele întregi, știind că $a\circ b=8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f'(x)\ge -1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=3$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2016$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este mai mic decât 14π.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z = i(1+i)^2$.

5p **2.** Determinaţi numerele reale m, ştiind că imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$ este intervalul $[-1,+\infty)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}+2^{x+1}=4-2^x$.

5p **4.** Determinaţi numărul elementelor mulţimii $M=\{1, 2, 3,\dots, 2016\}$ care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{BM}$. Arătaţi că $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Determinaţi numerele reale $x\in[0,\pi]$, pentru care $\sin 2x=\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2015 & 2016 & x \\ 2015^2 & 2016^2 & x^2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2016))$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x))=(2015-x)(2016-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $\det(A(x))$ are valoarea minimă.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $A\cdot A$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați inversa matricei $M=X(-3)\cdot X(-2)\cdot X(-1)\cdot X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)\cdot X(4)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{mx^2+4x-m}{x-1}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că dreapta de ecuaţie $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m, pentru care dreapta de ecuaţie $y=3$ este asimptotă orizontală la graficul funcției $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

5p **c)** Pentru $m=-1$, calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+2a, & x<2 \\ ax+\log_2 x, & x\geq 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=0$, calculaţi $f(-1)\cdot f(4)$.

5p **b)** Demonstrați că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1,4)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $2a_{10} = a_5 + a_6 + 36$.
5p	**2.** Determinați abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-1$ cu dreapta de ecuație $y = x-1$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\frac{x-1}{x+1}+\log_2\left(x^2-1\right)=4$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor divizibil cu 10.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(1,4)$ şi $C(5,1)$. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
5p	**6.** Arătaţi că $\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}=\text{ctg}^2 x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ x & 2x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculaţi $\det(M(0))$.
5p	**b)** Demonstrați că $2M(x)-M(-x)=M(3x)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(n, 2n-1)$ şi $B\left(n^2, 2n^2-1\right)$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Demonstrați că aria triunghiului OAB este număr natural.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y = 6xy-2x-2y+1$.
5p	**a)** Calculaţi $1\circ\frac{1}{3}$.
5p	**b)** Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
5p	**c)** Calculați $\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\frac{3}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^4+3}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=-\frac{3(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $-\frac{1}{4}\leq f(x)\leq\frac{1}{4}$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-2$.
5p	**a)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1)=0$.
5p	**b)** Calculaţi $\int_0^1 x f(x)\,dx$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale x, ştiind că $\int_1^x f(t)\,dt=0$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}=9$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(m,4)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4\left(x^2+9\right)=\log_4 25$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie divizibil cu 2.

5p **5.** Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}-6\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6**. Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{1}{2}$, arătați că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 2x\\ -6x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $A\left(2^x\right)A\left(2^x\right)=A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a, pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3=-5$, pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(\pi)>13$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real m, pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x+m)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a, știind că $\int_0^a f(x)\,dx=3a$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 4$ și rația $q = 2$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x+1) = \log_3 5$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

5p **5.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(1,0)$ aparține dreptei de ecuație $y = mx - 2$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB = \sqrt{2}$ și $C = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2)) = -1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a) + A(-a) = 2A(0)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)A(x) = 2A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + mX + 4$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1) + f(1) = 0$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Pentru $m = -1$, arătați că polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(e) < \frac{7}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 x^2 f(x)\,dx = e(e-1)$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$ are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

VARA, 2016

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1-i$. Arătați că $z^2=-2i$.

5p **2.** Calculați $(g\circ f)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2016$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2016$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d, care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=3x-2016$.

5p **6.** Determinaţi aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=6$, $AC=4$ şi $A=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-3xy+9x+9y-24$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x*x)*x=12$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(x^3-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_3=5$ și $b_4=10$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+12}=x+2$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(1,0)$. Determinați ecuația dreptei AB.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB=6$ și $C=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & -x\\ 2x & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq 1$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1\circ 2\circ 3\circ 4=3$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $\ln x\leq x-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x^2+1)f(x)\,dx=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=1-\frac{\pi}{4}$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n, știind că $\int_n^{n+1} 2x f(x)\,dx=\ln 2$.