Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 17 , An VII-2006

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2006

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9767

© 2006, Editura „Neutrino”

Mobil: 0724224400
www.neutrino.ro
E-mail: editura@neutrino.ro

CUPRINS

Gânduri despre matematică şi nu numai

În fiecare ştiinţă este numai atâta ştiinţă adevărată câtă matematică conţine.

Immanuel Kant

Matematica reprezintă în sine o colecţie de rezultate care pot fi aplicate la orice.

Bertrand Russell

Geometria este arta de a judeca pe desene rău efectuate.

Niels H. Abel

Dacă cineva vrea să determine cu un cuvânt laconic şi expresiv esenţa matematicii, acela trebuie să spună că este o ştiinţă despre infinit.

Henri Poincaré

Există zerouri cărora li se pare că sunt elipse şi în jurul lor se învârte toată lumea.

S. E. Lec

Eu am văzut cum odată Laplace a încercat timp de o oră să restabilească lanţul raţionamentelor voalate de către el în "Mecanica cerească" prin intermediul cuvintelor "este uşor de văzut că".

Din amintirile unui elev de al lui Laplace

Cu cât mai mult înveţi, cu atât mai mult ştii.
Cu cât mai mult ştii, cu atât mai mult uiţi.
Dacă mai mult uiţi, mai puţin ştii.
Iar dacă mai puţin ştii, mai puţin uiţi.
Dar dacă mai puţin uiţi, mai mult ştii.
Atunci pentru ce să înveţi?

Din folclorul savanţilor

Matematica seamănă cu o moară: dacă veţi turna în ea boabe de grâu, veţi obţine făină, iar dacă veţi turna în ea tărâţe, tărâţe şi veţi obţine.

A. Huxley

Să ai o viață echilibrată,să înveți un pic din toate,să te bucuri de vârsta pe care o ai

(interviu cu Anca Văcărescu realizat de Lucian Dragomir)

Sperăm să vă bucurați în cele ce urmează împreună cu noi , pentru că am reușit după câțiva ani o reântâlnire de suflet.E vorba de câteva minute petrecute în compania uneia dintre cele mai premiate eleve din județul nostru în cadrul concursurilor de matematică.E vorba de una dintre cele mai simpatice olimpice pe care am cunoscut-o .E vorba de Anca Văcărescu,născută în Caransebeș(27 iunie 1982),absolventă a Liceului *Traian Doda* ,colecționara unei impresionante galerii de premii obținute la concursurile de matematică: olimpiada județeană –premiul I (clasele V-XI),premiul II(clasa a XII a),olimpiada națională – premiul I (clasa aVII a),premiul II (clasa a XII a),premiul III (clasele VIII-XI);după frumoșii ani de liceu,Anca a fost studentă la Florida International University din Miami (2001-2005) , absolventă Summa Cum Laudae.Din 2005 urmează cursuri de doctorat în matematică la Standford Univerity of California.

Iată acum câte ceva din ce am discutat:

1.Care a fost primul contact cu matematica ?

Cred că am început să acord mai multă atenție matematicii decât celorlalte materii din ciclul primar,atunci când doamna învățătoare Florica Franț ne-a încurajat să facem probleme suplimentare și ne-a motivat prin diferite concursuri.

2. Ce profesori ți-au marcat drumul prin școală?

Toți profesorii mei de matematică au avut o contribuție importantă în formația mea intelectuală și mai ales academică. Doamna profesoară Lavinia Moatăr, care ne-a prezentat încă din clasa a 5-a teoreme și formule dificile, mi-a motivat curiozitatea matematică si m-a învățat să gândesc riguros, abstract. Dorința de a-mi depăși propriile limite, disciplina de a învăța într-un ritm alert si persistent, toate le-am dobândit de la acea vârsta fragedă datorita doamnei Moatăr și s-au dovedit calități nepreșuite de-a lungulor aniilor. De asemenea rămân profund recunoscătoare domnului profesor Ion Poru, cât și domnilor profesori Iacob Didraga si Mihail Neacșu.

3. Cum te pregăteai pentru concursuri,program aproximativ?

Pregătirea îmi lua destul de mult timp, de la 4 ore pe zi când nu aveam multe teme la alte materii, până la 10 ore pe zi în preajma olimpiadelor.

4. Care premiu a fost cel mai muncit , de care te leagă amintirile cele mai puternice?

Nu pot să spun că un anume premiu mi-a adus o satisfacție deosebită față de celelalte. M-am pregătit foarte intens în fiecare an, și după atâta muncă și stres, un premiu este numai cireașa de pe tort. Faptul în sine că ai acceptat provocarea pe care ți-o prezintă matematica și lupta cu tine însăți de a nu renunța în fața unor probleme grele este adevarata răsplata pe care o ai din aceasta experiență a olimpiadelor.

5. Vreo amintire deosebită din anii de școală(nu neapărat legată de matematică)?

Legat de olimpiade totuși, îmi vine în minte săptămâna naționalei din fiecare an: călătoria până acolo, locurile noi pe care le vizitezi, oamenii pe care îi cunoști, prietenii pe care ți-i faci. Este un avantaj la care nu m-am gândit la început când am ales să fac matematică, dar pe care l-am avut chiar și după anii olimpiadelor prin posibilitatea de a studia în SUA și de a merge în viitor, sper, la conferințe în diferite țări.

6. Cu cine din țară mai ții legătura?

Cu toata lumea de care am fost apropiată. Internetul face minuni.

7. Ce faci acum , cam cu ce te ocupi (eventual detalii matematice)?

Tocmai am trecut examenele pentru candidatura la doctorat, care se dau la Stanford la sfârșitul anului I. În urmatoarele luni, va trebui să imi aleg un profesor cu care să lucrez, și să încep cercetarea pentru teza de doctorat. Deocamdată mă gândesc să studiez geometrie algebrică, dar vreau ca în acești 5 ani de doctorat să îmi iau și cursuri pentru un master în matematica financiară, pentru a avea mai multe posibilități de lucru în viitor. După 5 ani în SUA, trebuie să recunosc că am început să gândesc un pic ca americanii, adică practic.

8. Cât de mult simți că te-a ajutat în ceea ce faci acum efortul depus în anii de gimnaziu și de liceu la matematică?Cât de mult merită să participe un elev la olimpiade,cât de mult merită să își ocupe timpul cu "spargerea"unor teme si probleme dificile(în timp ce alții se relaxează)?

Nu cred că cineva îți poate garanta că olimpiadele te vor ajuta concret în viitor, dar cred că nu ai nimic de pierdut,ba chiar numai de câștigat dacă măcar încerci să excelezi într-un anume domeniu. Eu am continuat pe matematică și cred că participarea la olimpiade m-a ajutat imens în cariera universitară: raționamentul problemelor de olimpiade îl regăsesc de multe ori în probleme dificile la care lucrez acum, iar ritmul asiduu de lucru parcă mi se pare acceptabil după focul pregătirii pentru concursuri. În plus, participarea repetată la olimpiade arată foarte bine într-un C.V: dă dovada unui caracter motivat, perseverent, căruia nu îi este frică să muncească în plus şi în general poate ajuta enorm în procesul de aplicare pentru o facultate sau un post de lucru.

9.Un îndemn pentru micii olimpici cărăşeni ?

Cred că dacă nu eşti dispus să faci un efort deosebit, nu poţi să te astepţi la un rezultat deosebit, şi asta nu numai în matematică. În principal însă, un elev nu ar trebui să muncească numai cu gândul la rezultate şi la premii, pentru că de multe ori matematica poate deveni foarte frustranta, fără rezultate şi satisfacţii imediate, iar premiile sau lipsa de premii nu este complet reprezentativă pentru potenţialul tău matematic. Dar, dacă lucrezi la matematică din pasiune şi curiozitate, o să ai numai de câştigat din străduinţa ta: o să ai o gândire riguroasă, o imaginaţie creativă şi în plus o să înveţi o mulţime de lucruri nu numai folositoare, dar şi interesante. Nu uita însă să ai o viaţă echilibrată, să înveţi un pic din toate, şi să te bucuri de vârsta pe care o ai acum. Mult succes!

10. Câstig premiul I la olimpiada judeţeană de câţiva ani şi deocamdată la naţională nu iau nici un premiu , merită să continui munca enormă la matematică sau să fac altceva : sport , româna. fizică,istorie?

O parte din răspuns cred că se regăseşte în ce spuneam mai înainte**.**Voi insista însă şi eu **:**Dacă într-adevăr îţi place să lucrezi la matematică, bineânţelesc merită. De fapt, ar trebui să încerci câte puţin din orice crezi că te pasionează şi apoi să iei o decizie informată pe care domeniu vrei să te concentrezi. Dar, orice ai alege, nu lăsa câteva dezamăgiri să te abată de la drumul pe care l-ai ales. În matematică, mai ales, poţi să munceşti foarte mult şi să îţi pice de multe ori într-un examen probleme ciudate, sau pur şi simplu să nu vezi soluţia în ziua respectivă. Faptul că nu eşti premiat nu înseamnă că pregatirea a fost inutilă sau că eşti mai puţin inteligent şi ar trebui să renunţi. Eşti aceeaşi persoană ca înainte de concurs şi tot ceea ce poţi face este să înveţi din această experienţă, poate să îţi schimbi stilul de a învăţa, ori poate să încerci din nou mai mult şi mai tare.

11.Ce crezi că ar trebui schimbat în învăţământul matematic românesc (acum că eşti acolo şi vezi altceva) ?

Nu prea mai ştiu cum este învăţământul românesc acum. Ştiu că s-au făcut multe schimbări de când am termiant eu liceul, dar pot să spun că sistemul în care am învăţat eu a fost foarte bun şi nu l-am apreciat destul, până când am cunoscut studenţi din alte ţări cu mai puţină cultură generală şi mai puţin specializaţi în matematică. În general, sistemele europene sunt foarte apreciate pe plan mondial, şi nu prea înţeleg de ce se încearcă o schimbare radicală a învăţământului românesc. Într-adevar, cred că este nevoie de o perspectivă mai practică în educaţie, în care teoria să fie însoţită de exemple concrete. Poate asta ar motiva mai mult elevii să înveţe şi să aprecieze anii şcolii, pe când o schimbare totală şi nu foarte bine organizată îi va determina să trateze învăţământul în acelaşi fel: neserios şi neorganizat.

În numele tuturor cititorilor revistei noastre nu pot decât să mulţumesc din suflet domnişoarei Anca Văcărescu pentru clipele pe care ni le-a răpit pentru a ni le dărui , nu pot decât să sper că alţi şi alţi mici matematicieni îi vor urma calea ascendentă.

Prof.Lucian Dragomir,20 iulie 2006

Implementarea lecţiilor AEL în orele de matematică

Prof.Irina Avrămescu, Prof.Vasile Chiş,
Şcoala cu clasele I-VIII nr.9, Reşiţa

(Extrase din lucrarea cu acelaşi titlu prezentată la Simpozionul Didactica Reşiţa 2006)

Programul SEI pune la dispoziţia beneficiarilor noi instrumente didactice pentru utilizarea în şcoli, crescând astfel calitatea procesului educaţional. Oferă un substitut pentru instrumentele sau experimentele de laborator costisitoare sau periculoase pentru cei care le manevrează.

AEL este coloana vertebrală a programului SEI, oferind suport pentru predare-învăţare, evaluare şi notare, administrarea, proiectarea şi monitorizarea conţinutului. De asemenea, asigură mijloacele necesare comunicării şi sincronizării între centrele locale şi regionale din cadrul programului SEI.

AEL permite vizualizarea şi administrarea unor tipuri vaste de conţinut educaţional, precum: materiale interactive, tutoriale, exerciţii, simulări, jocuri educative. Biblioteca de materiale educaţionale acţionează ca un gestionar de materiale: este adaptabilă, configurabilă, indexabilă şi permite o căutare facilă. Chiar şi utilizatorii începători pot:

• crea conţinut (editor HTML încorporat, editor de formule matematice, editoare de teste şi de dicţionare);

• importa/exporta conţinut din fişiere, arhive de resurse utilizând standarde de împachetare precum SCORM şi IMS;

• adapta sau edita conţinut;

• construi propriile cursuri din componente deja existente.

AEL este optimizat pentru învăţare sincronă, profesorul controlând în întregime lecţia, creând, coordonând şi monitorizând procesul educaţional

AEL oferă de asmenea facilităţi pentru învăţarea asincronă (în ritmul fiecărui cursant), proiecte în colaborare şi învăţare la distanţă.

Testele sunt integrate cu fişele de studiu ale elevilor, sistemul păstrând evidenţa evoluţiei fiecărui elev.

Prin AEL, profesorul poate să:

• controleze transferul conţinutului către elevi;

• transmită individualizat momente de lecţie către elevi, în funcţie de nivelul de capacitate sau cunoştinţe ale acestora

• administreze şi monitorizeze testele;

• urmărească activitatea elevilor, monitorizând ecranele de lucru şi rapoartele on-line;

În şcoala noastră suntem la începuturile aplicării lecţiilor AEL la orele de matematică. Din scurta noastră experienţă am constatat că elevilor le plac aceste lecţii şi folosesc cu uşurinţă programul.

Există lecţii de geometrie interesante pe care le-am importat şi avem de gând să le desfăşurăm la lecţiile de recapitulare finală. La clasa a VI-a: „Unghiuri”, „Triunghiul”, „Simetria faţă de punct şi dreaptă”, „Cercul”, „Poziţii relative ale dreptei faţă de cerc”, „Asemănare” , la clasa a VII-a, „Construcţia figurilor geometrice în spaţiu”, „Construcţia corpurilor geometrice”, „Conul”, „Cilindrul”, „Trunchiul de con”, etc.

De asemenea vrem să creem teste de verificare astfel încât unele din lucrările de evaluare să aibă loc în laboratorul AEL.

În această lucrare vom prezenta un exemplude proiect de lecţie şi două exemple de teste. Primul importat din fişierele existente şi ultimele create de noi.

Ne permitem doar să reamintim că pentru a pregãti un material didactic util şi eficient trebuie sã gãsim un rãspuns la urmãtoarele întrebãri:

Ce
Cu ce
Cui → predãm?
În ce condiţii
Cu ce scop
Cum

În cazul instruirii programate rãspundem astãzi astfel la întrebãrile de mai sus:

- Ce? - Predãm materia prevãzutã în curiculele şcolare
- Cu ce? - Cu calculatoare PC corespunzãtoare.
- Cui? - Celor ce doresc sã înveţe astfel.
- În ce condiţii? - Cu condiţia în care societatea ne permite sã folosim calculatoare, deci şcoala este dotată cu programul AEL.
- Cu ce scop? - Cu scopul de a obţine rezultate cât mai bune în instruirea şi educarea elevilor.
- Cum? - Prin programare didacticã.

<u>Proiect de lecţie</u>

Data: 4 aprilie 2006

Clasa a VII-a

Obiectul: Matematică – Geometrie

Unitatea de învăţare: Cercul

Tipul lecţiei: Dobândirea de noi cunoştinţe

Obiective de referinţă:

1. Să recunoască şi să definească elemente ale cercului: rază, arc, coardă, diametru
2. Să recunoască şi să definească unghiul la centru şi unghiul înscris în cerc
3. Să estimeze măsurile unor unghiuri, distanţe, lungimi
4. Să diferenţieze informaţiile dintr-un enunţ matematic după natura lor
5. Dezvoltarea capacităţii de a comunica utilizând limbajul matematic
6. Dezvoltarea capacităţii de explorare/investigare şi rezolvare de probleme
7. Să fie atenţi şi să participe afectiv la lecţie
8. Să-şi dezvolte interesul pentru studiul matematicii

Strategii didactice: conversaţia, problematizarea, demonstraţia orală, explicaţia

Mijloace de realizare: laborator AEL, cretă colorată

Forme de organizare: frontală, individuală

<u>Desfăşurarea lecţiei</u>

Se intră în sala AEL. Elevii şi eu ne conectăm la calculatoare. Elevii au deja însuşite noţiunile de cerc, rază, coardă, diametru, unghi la centru, unghi înscris în cerc.

Se explică că în prima parte a lecţiei vor vizualiza elementele cercului, unghiul înscris şi unghiul la centru. Timp estimat 15 minute.

În partea a doua vom vedea proprietăţile arcelor şi a coardelor şi le vom scrie pe caiete, le vom demonstra oral şi apoi elevii vor avea ca temă pentru acasă să le demonstreze pe caiet. Timp estimat 30 de minute.

<u>Prima parte</u>

Definim pe rând cercul şi elementele cercului cu proprietăţile lor. Se notează pe tablă pe scurt. Se lansează lecţia şi prima componentă a lecţiei. Elevii au pe monitor două cuie şi o sfoară pe care o leagă de unul din cuiele bătute şi trasează cercul. Se vizualizează cercul şi vor apărea pe rând elemntele cercului. Le vom crea, le vom citi definiţiile pe ecran, evaluând corectitudinea definiţiilor date de noi la începutul lecţiei.

<u>A doua parte</u>

Se lansează componenta următoare a lecţiei. Vor apărea pe rând pe partea dreaptă a ecranului figurile corespunzătoare teoremelor pe care le selectăm. Notăm pe caiete şi pe tablă enunţul teoremei. Analizăm oral modul de a o demonstra pe fiecare în parte. Vizualizăm modificând figura că proprietatea nu are loc dacă modificăm o ipoteză.

<u>Evaluarea</u> are loc prin aprecieri pozitive asupra contribuţiei fiecărui elev la desfăşurarea orei şi aprecierile elevilor asupra modului de concepere a lecţiei (cum au perceput-o, ce amanunte au retinut, etc.).

<u>Observaţie</u>: I se permite pe rând fiecărui elev să parcurgă lecţia lucrând efectiv pe monitor.

Aşa cum s-a aratat şi mai înainte, sistemul AELse pretează nu numai la predarea şi fixarea noţiunilor , dar şi la verificarea măsurii în care ele au fostv însuşite de către elevi şi la evaluarea acestora. În acest sens sistemul AEL oferă asistenţă în vederea creării de teste de verificare şi de evaluare.

Pentru a elabora un test , utilizatorul trebuie să parcurgă trei paşi: crearea testului propriu-zis, crearea problemelor testului şi crearea variantelor de răspuns la aceste probleme.

Crearea testului propriu-zis necesită precizarea titlului testului, a numelui autorului, a datei creării descrierea testului, modul de parcurgere, modul de revenire durata, etc.

Crearea problemelor testului necesita precizarea numelui problemei , a gradului de dificultate (pe o scară de la 1 la 5), timpul necesar, punctajul acordat şi tipul problemei. În funcţie de tipul problemei se adaugă tipul şi numărul dorit de variante de răspuns.

Fără a intra în amănunte în legătură cu modul de creere a testelor (acesta putând fi găsit în Manualul de utilizare AEL) vom ilustra această posibilitate de utilizare a sistemului AEL prin două teste din materia de gimnaziu.

Un prim test se adresează elevilor clasei a VI-a, la tema „Proprietăţile triunghiurilor”. Se compune din 7 probleme, de tipuri diferite şi de diferite grade de dificultate.

<u>TESTUL 1</u>

<u>PROBLEMA 1</u> (este de tipul adevărat/fals şi volorează 1p)

Triunghiul cere are un unghi ascuţit este ascuţitunghic.

○ adevărat

⊙ fals.

<u>PROBLEMA 2</u> (este de tipul adevărat/fals şi valorează 1p)

Triunghiul care are două unghiuri complementare este dreptunghic.

⊙ adevărat

○ fals.

<u>PROBLEMA 3</u> (este cu o singură variantă corectă şi valorează 1p)

Un triunghi cu laturile de 5 cm, 7 cm şi 10cm are semiperimetrul de:

○ 15 cm,

○ 22 cm,

⊙ 11 cm.

<u>PROBLEMA 4</u>(este cu o variantă de răspuns şi valorează 1p)

Fiind date triunghiurile echilaterale ABC şi BCD, $A \neq D$, măsura unghiului ABD este de:

○ 60^0,

⊙ 120^0,

○ 180^0.

<u>PROBLEMA 5</u> (este cu mai multe variante corecte , valorează 2p)

Două dintre laturile unui triunghi isoscel sunt de 8 cm şi respectiv de 11 cm. Perimetrul triunghiului este de :

○ 19 cm,

⊙ 27 cm,

⊙ 30 cm.

PROBLEMA 6 (este cu toate variantele corecte și valorează 2p)

Un unghi al unui triunghin isoscel are măsura de 40^0. Un alt unghi al triunghiului poate avea măsura de :

⊙ 40^0,

⊙ 70^0,

⊙ 100^0.

PROBLEMA 7 (este cu asociere de elemente și valorează 2p)

Un triunghi dreptunghic ABC are unghiul A drept și BC= 14 cm. Asociați propozițiilor din prima coloană afirmații din a doua coloană, pentru a obține propoziții adevărate.

$m(\sphericalangle B)=30^0$	$[AB]\equiv[AC]$
$m(\sphericalangle C)=20^0$	AC = 7 cm
$m(\sphericalangle B)=45^0$	$m(\sphericalangle B)=70^0$.

Al doilea test se adresează elevilor clasei a VII-a și le verifică cunoștințele referitoare la tema „Numere reale”. Testul se compune din 9 probleme.

TESTUL NR. 2

PROBLEMA 1 (este de tipul adevărat/ fals și valorează 1p)

Numărul $\sqrt{0,(7)}$ este rațional.

○ adevărat,

⊙ fals.

PROBLEMA 2 (este de tipul adevărat/fals și valorează 1p)

Numărul $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ nu este irațional.

⊙ adevărat,

○ fals.

PROBLEMA 3 (este cu o singură variantă corectă și valorează 1p)

A treia zecimală exactă a numărului $\sqrt{12}$ este:

○ 2

⊙ 4

○ 6.

PROBLEMA 4 (este cu o singură variantă corectă și valorează 1p)

Media geometrică a numerelor 3 și 27 este:

⊙ 9

○ 10

○ 15.

PROBLEMA 5 (este cu o singură variantă corectă și valorează 1p)

Rezultatul calculului $\sqrt{45}+\sqrt{80}-\sqrt{180}$ este:

○ $9\sqrt{5}$

○ $-\sqrt{5}$

⊙ $\sqrt{5}$.

PROBLEMA 6(este cu două variante corecte și valorează 1p)

Valoarea expresiei $\left|\sqrt{3}-2\right|+(-1)^n\sqrt{3}$, unde $n\in\mathbb{N}$, este:

⊙ 2

○ $\sqrt{3}$

⊙ $2\left(1-\sqrt{3}\right)$.

PROBLEMA 7 (este cu o singură variantă corectă, valorează 1p)

Raportul numerelor $3\sqrt{24}$ și $12\sqrt{6}$ este:

○ 2

○ 4

⊙ $\frac{1}{2}$.

PROBLEMA 8(este cu o singură variantă corectă și valorează 1p)

Rezultatul calculului $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}$ este:

⊙ 1

○ $2\sqrt{3}$

○ $3-\sqrt{3}$.

PROBLEMA 9 (este cu asociere de elemente și valorează 2p)

Asociați fiecărei fracții din prima coloană numărul real corespunzător, din a doua coloană, obținut prin raționalizarea numitorului acelei fracții.

$\frac{6}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$
$\frac{4}{\sqrt{24}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\left(\sqrt{2}\right)^{-1}$	$2\sqrt{3}$.

OBSERVAȚIE: în cazul fiecărui test, nota finală se obține prin însumarea punctajelor problemelor rezolvate corect.

Există evident plusuri și minusuri în aplicarea acestei metode de predare.

Unul dintre elementele pozitive este faptul că este benefică obișnuirea elevilor cu mediul virtual care este din ce în ce mai frecvent în era în care trăim, era numită „Era informațională”.

Scopul unei lecții nu este numai însușirea unor cunoștințe cognitive ci și formarea unor deprinderi de asimilare a unor cunoștințe în situații mediale diferite prin dezvoltarea capacităților de asimilare creativă. Adaptarea la mediul în care trăim și muncim nu presupune numai însușirea unor cunoștințe abstracte ci și familiarizarea cu elementele de bază ale noii ere, cu cele mai noi tehnologii. Școala trebuie să fie mai mult decât o mașină de instruire.

Pe de altă parte unul dintre minusurile instruirii asistate pe calculator este faptul că o oră de rezolvări de exerciții și probleme contribuie mai mult la dezvoltarea gândirii logice, a raționamentului matematic. În perioada gimnaziului se formează anumite deprinderi de calcul aritmetic și algebric, deci sunt necesare cât mai multe ore de aplicații.

Implementarea în programa de matematică a lecțiilor AEL trebuie bine gândită, altfel există riscul de a pierde ore prețioase din instruirea elevului. De exemplu noi am început unitatea de învățare „Cercul și elementele sale” printr-o lecție în sala AEL. Lecția a mers bine dar ulterior am constatat că bagajul de cunoștințe cu care a rămas elevul nu era cel scontat. Pe de altă parte la clasa aVI-a, lecția fiind de fixare rezultatele obținute au fost excelente: elevii au realizat figuri mult mai

corecte, au fixat foarte bine definițiile diferitelor categorii de triunghiuri, a crescut rapiditatea cu care au recunoscut diferitele tipuri de triunghiuri.

Un alt punct în minus pentru lecțiile AEL este faptul că elementele tridimensionale nu funcționează. Corpurile nu se rotesc, nu se translatează. Aceasta este însă o problemă tehnică de funcționare a programului care va fi remediată în timp.

Chiar cei care au elaborat programul au identificat câteva probleme:

- teama de înlocuire a profesorului de către computer;

- teama de necunoscut;

- numărul insuficient de computere existent în școli, utilizarea lor neadecvată, sau și mai rău neutilizarea lor.

Modalitățile de contracarare a lor sunt:

- instruirea în utilizarea AEL este recunoscută în mod oficial ca perfecționare didactică în cadrul programelor obligatorii de formare continuă a corpului profesoral;

-profesorii sunt stimulați material prin echivalarea unei ore desfășurate în laboratorul AEL cu 1,25 ore predate în sistem clasic.

La noi în școală în cadrul catedrei de matematică s-au luat măsuri ca în anul care urmează să realizăm astfel planificarea încât să includem lecțiile AEL în planificarea calendaristică și în planificarea unităților de învățare. Vom proceda la o analiză atentă, în cadrul ședințelor comisiei de catedră, a momentului în care vom include lecția AEL în proiectare. Avem de asemenea sarcina de lucru ca în timpul vacanței mari să elaborăm o serie de teste și lecții, să le introducem în computere cel târziu în luna septembrie, pentru a deveni operaționale în anul școlar următor.

Bibliografie:

[1] CNIV, Noi tehnologii de e-learning, Conferința Națională de Învățământ virtual, Softwer educațional, Editura Universității din București, 2003 (ISBN 973-575-822-9)

[2] htpp://portal.edu.ro

[3] htpp://portal.edu.ro/adlic

[4] Frank, Helmar (1996): Klerigkibernetiko / Bildungskybernetik. KoPäd, München, 1996-1999. (Reeditat în Meder/Schmid et al., Vol. II, 1999, 1 -239)

[5] Manual de utilizare AEL , versiunea 5.1, 2001-2005 SIVECO România SA

Matematica-azi

Opțional la clasa a VI-a G

Prof. Humiță Dorina și Mirulescu Mariță,
Liceul Pedagogic „C. D. Loga”Caransebeș

Durata cursului: 36 de ore anual

Argumente pentru alegerea opționalului:

Am ales acest opțional pentru că urmăresc:

- să lărgesc orizontul matematic al elevilor;
- să măresc palete de aplicații pe care elevii le pot rezolva utilizând baza teoretică adunată până acum;
- să ofer un alt punct de vedere asupra matematicii încercând s-o prezint într-o formă cât mai accesibilă și plăcută.

Obiective cadru urmărite în alcătuirea programei

I. Dezvoltarea interesului și a motivației pentru studiul matematicii.

Obiective de referință Elevul va fi capabil: - să înțeleagă importanța studiului pentru dezvoltarea raționamentului ; - să perceapă existența aplicabilității practice a matematicii și importanța sa în viața de zi cu zi.	**Activități de învățare:** - analizarea unor probleme a căror rezolvare are la bază observații și raționamente logice imediate; - prezentarea unor probleme cu conținut practic

II. Crearea climatului științific necesar dezvoltării gândirii.

Obiective de referință Elevul va fi capabil: - să se mobilizeze pentru a putea înțelege și participa la activități de probleme propuse și de creare de exerciții și probleme originale.	**Activități de învățare:** - analizarea rezolvării unor probleme date; - propunerea de către elevi a unor exerciții și probleme.

III. Cunoașterea și înțelegerea conceptelor, terminologiei și procedeelor de calcul specifice matematicii.

Obiective de referință Elevul va fi capabil: - să-și însușească noi concepte matematice, terminologia aferentă și procedeele de calcul specifice; - să-și formeze obișnuința de a recurge la concepte și metode matematice în abordarea unor situații cotidiene sau rezolvarea unor probleme practice.	**Activități de învățare:** - analizarea unor probleme; - notarea prescurtată a datelor (ce se dă, ce se cere); - exerciții de rezolvare a problemelor tip; - redactarea rezolvării unor probleme.

IV. Dezvoltarea capacităților de explorare/investigare și rezolvare de probleme.

Obiective de referință Elevul va fi capabil: - să aleagă, din multitudinea de noțiuni însușite și metode studiate, pe acelea care îl vor duce la rezolvarea unei probleme anume dată.	**Activități de învățare:** - rezolvarea unor probleme ce implică utilizarea succesivă a mai multor metode și procedee studiate.

V. Dezvoltarea capacității de a comunica utilizând limbajul matematic.

Obiective de referință Elevul va fi capabil: - să argumenteze rezolvările făcute utilizând limbajul matematic adecvat; - să colaboreze în cadrul unei echipe la activități specifice disciplinei.	**Activități de învățare:** - prezentarea în scris și oral a rezolvării unor probleme; - elaborarea într-un grup de lucru a rezolvărilor unor probleme dificile.

Conținuturi.

1. Calculul unor sume.
2. Probleme de numărare și combinatorică.
3. Probleme deosebite de divizibilitate.
4. Exemple și contraexemple în matematică.
5. Metoda reducerii la absurd în aritmetică.
6. Probleme de logică (distractivă).
7. Lucrări de verificare.
8. Recapitulare.

Modalități de evaluare.

1. Teste de evaluare a cunoștințelor.
2. Efectuarea unor lucrări individuale sau pe grupe cu autoevaluare.
3. Chestionarea orală pe tot parcursul anului.
4. Notarea în cadrul unor activități practice prin observarea activității.

SEMESTRUL I

Nr. crt.	Conținuturi	Obiective operaționale	Nr. ore	Săptămâna	Obs.
I.	**Calculul unor sume**	Elevul va fi capabil să: - să recunoască tipul de problemă și metoda de abordare a rezolvării; - să generalizeze metoda învățată și la calcularea altor sume.			Se calculează suma primelor n numere pare, (impare)
1.	Suma primelor *n* numere naturale și aplicații ale ei.		2	(1) și (2)	
2.	Suma pătratelor (cuburilor) primelor *n* numere naturale și aplicații ale ei.		2	(3) și (4)	
3.	Sume în care intervin anumite numere raționale.		2	(5) și (6)	
4.	Aplicații.		1	(7)	
5.	Lucrare pentru verificarea cunoștințelor.		1	(8)	
II.	**Probleme de numărare și combinatorică**	- să recunoască problemele în care se aplică principiul cutiei; - să poată rezolva aceste probleme			Se insistă pe compunere de probleme care să se încadreze în metoda studiată.
6.	Principiul cutiei.		2	(9) și (10)	
7.	Aplicații.		2	(11) și (12)	
8.	Lucrare pentru verificarea cunoștințelor.		1	(13)	
III.	**Recapitulare**	- să poată propune probleme de acest tip.	1	(14)	
IV.	**Probleme deosebite de divizibilitate.**	- să poată utiliza criteriile de divizibilitate cu 7, 11, 13 în rezolvarea unor exerciții.			
9.	Criteriul de divizibilitate cu 7.		2	(15) și (16)	
10.	Criteriul de divizibilitate cu 11.		2	(17) și (18)	

SEMESTRUL AL II-LEA

Nr. crt.	Conținuturi	Obiective operaționale	Nr. ore	Săptămâna	Obs.
		Elevul va fi capabil să: - să recunoască numerele perfecte și numerele amiabile			Se calculează suma primelor n numere pare, (impare)
11.	Criteriul de divizibilitate cu 13.		1	(1)	
12.	Aplicații.		1	(2)	
13.	Numere perfecte		1	(3)	
14.	Numere amiabile		1	(4)	
15.	Lucrare pentru verificarea cunoștințelor		1	(5)	
IV.	**Exemple și contraexemple în matematică**	- să poată construi exemple și contraexemple pornind de la o noțiune dată.			Se insistă pe construirea de exemple și contraexemple pentru anumite probleme date.
16.	Rolul exemplelor și contraexemplelor în matematică		2	(6) și (7)	
17.	Aplicații		1	(8)	
18.	Lucrare pentru verificarea cunoștințelor		1	(9)	
V.	**Utilizarea metodei reducerii la absurd**	- să recunoască problemele ce se pot rezolva folosind metoda reducerii la absurd; - să poată utiliza metoda reducerii la absurd.			
19.	Descrierea metodei		1	(10)	
20.	Aplicarea metodei reducerii la absurd în rezolvarea unor probleme de aritmetica		2	(11) și (12)	
21.	Lucrare pentru verificarea cunoștințelor		1	(13)	

VI. 22.	**Probleme de logică (distractivă)** Rezolvarea unor probleme de logică	- să poată utiliza raţionamentul logic în rezolvarea unor probleme.	2	(14) şi (15)	
VII.	**Recapitulare finală**		3	(16), (17), (18)	

Standarde curriculare de performanţă

Standarde minimale.

1. Să recunoască suma primelor *n* numere naturale şi să o poată calcula pentru valori particulare ale lui n.

2. Să recunoască problemele care se pot rezolva utilizând principiul cutiei.

3. Să conştientizeze existenţa mai multor criterii de divizibilitate faţă de cele studiate la clasă.

4. Să perceapă perfect ce înseamnă exemplu şi ce înseamnă contraexemplu în matematică.

5. Să cunoască etapele ce trebuie parcurse în aplicarea metodei reducerii la absurd.

6. Să perceapă exact datele unei probleme de logică.

Standarde optime.

În plus faţă de standardele minimale, elevul trebuie:

1. Să poată calcula suma numerelor pare (impare) mai mici decât un număr dat.

2. Să rezolve probleme simple de numărare.

3. Să poată aplica criteriile de divizibilitate cu 7, 11, 13 în recunoaşterea numerelor divizibile cu ele.

4. Să poată construi singur exemple şi contraexemple pentru probleme date.

5. Să recunoască problemele ce pot fi rezolvate folosind metoda reducerii la absurd.

6. Să poată rezolva probleme de logică (distractivă) cu grad de dificultate mediu.

Standarde de performanţă.

În plus faţă de standarde optime elevul trebuie:

1. Să poată calcula şi alte sume în afară de cele relativ imediate.

2. Să rezolve probleme folosind principiul cutiei.

3. Să poată rezolva probleme în care intervin criteriile de divizibilitate cu 7, 11, 13.

4. Să utilizeze contraexemple în rezolvarea unor probleme.

5. Să opereze concret cu metoda reducerii la absurd.

6. Să rezolve probleme de logică (distractivă) cu grad mare de dificultate.

Bibliografie.

1. Ion Pătraşcu, Constantin Preda, *Complemente de matematică pentru gimnaziu*, Editura Cardinal, Craiova, 1994.
2. Liliana Niculescu , *Teme de algebră pentru gimnaziu*, Editura Cardinal, Craiova, 1993.
3. Ioan Dăncilă, *Matematica gimnaziului între profesor şi elev*, Editura Corint, Bucureşti, 1996.

Distanţe

Prof.Stăniloiu Nicolae,Bocşa

Prezenta notă fixează câteva idei de bază în calculul unor distanţe.

Pentru calculul distanţelor de la un punct la un plan, următoarea propoziţie aduce în unele situaţii o simplificare semnificativă a soluţiei.

Propoziţia 1: Dacă α este un plan, A un punct din plan, M un punct exterior planului şi E un punct pe segmentul [MA] a.î. $\frac{MA}{EA}=k>0$, atunci $d(M,\alpha)=kd(E,\alpha)$, unde prin d(M, α) se înţelege distanţa de la M la planul α.

Demonstraţia acestei propoziţii este foarte simplă şi nu o vom mai face însă voi sublinia importanţa aceste propoziţii cu ajutorul unui exemplu.

Aplicaţia 1. Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată având latura bazei L=12 şi înălţimea VO=8. (vezi fig. 1). Să se calculeze distanţa de la A la faţa (VBC).

În loc să construim perpendiculara din A pe planul (VBC) lucru care ar complica figura, vom folosi propoziţia anterioară, adică vom scrie că $d(A,(VBC))=\frac{AC}{OC}d(O,(VBC))=2d(O,(VBC))$. Calculul distanţei

$d(O,(VBC))$ este foarte simplu aceasta fiind chiar înălțimea triunghiului dreptunghic VOE. În final vom obține că $d(A,(VBC)) = 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{10} = 9{,}6$

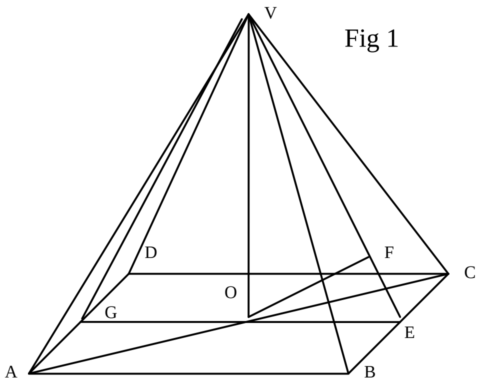


Fig 1

Pentru calculul distanței dintre două drepte neconcurente și neparalele reamintim că distanța dintre două drepte neconcurente este lungimea perpendicularei comune. Am observat că la foarte multe probleme de acest tip se propun soluții bazate pe construcția perpendicularei comune ceea ce complică uneori foarte mult soluția. În cele ce urmează propun o metoda de calcul al lungimii perpendicularei comune bazată pe construcția următoare: Se va construi mai întâi un plan ce conține una din cele două drepte și este paralel cu cealaltă dreaptă (Acest plan este unic). Lungimea perpendicularei comune este acum egală cu distanța de la această a doua dreaptă la planul astfel construit. Pentru calculul acestei distanțe se ia un punct pe această dreaptă ales în mod convenabil așa încât calculul acestei distanțe devine foarte simplu.

Aplicația 2. Cu datele din problema anterioară, vom cere acum să se calculeze: $d(AV, BC)$

Pentru a da o soluție nu vom construi perpendiculara comună a celor două drepte ci vom observa că: $BC \,//\, (VAD)$ și deci este suficient să calculăm $d(BC,(VAD))$, distanță care nu este altcineva decât înălțimea din E a triunghiului VEG și care este tot 9,6.

Încercați să folosiți observațiile precedente în rezolvarea unor probleme de acest tip și veți scăpa de foarte multe necazuri.

Funcții periodice

Prof.Mihai Monea
Colegiul Național Decebal Deva

Acest articol nu conține neapărat lucruri originale, ci dorește să adune câteva proprietăți generale ale funcțiilor periodice. Motivul principal îl reprezintă unele dintre subiectele propuse spre rezolvare la proba de matematică a examenului de bacalaureat sau diferitele simulări din anii 2003-2005

Pentru început voi fixa următorul cadru general și vom vorbi despre funcții periodice $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neconstante, cu perioada principală $T>0$.

Propoziția 1 Funcția f nu este strict monotonă.

Demonstrație: Alegem $0 < x_1 < x_2$, astfel încât $f(x_1) \neq f(x_2)$. Conform axiomei lui Arhimede, există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $x_3 = x_1 + nT > x_2$. Evident $f(x_1) = f(x_3)$. Dacă, de exemplu $f(x_1) < f(x_2)$ atunci $f(x_3) < f(x_2)$ și deci funcția nu este strict monotonă.•

Propoziția 2 Nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Demonstrație: Fie $x \neq y$, pentru care $f(x) \neq f(y)$. Construim șirurile $x_n = x + nT$, $y_n = y + nT$ care au limita infinită. Avem $f(x_n) = f(x+nT) = f(x)$ și $f(y_n) = f(y+nT) = f(y)$. Evident $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(y)$ și cele două limite sunt distincte ceea ce este echivalent cu enunțul propoziției. •

Propoziția 3 Dacă f este continuă în x_0 atunci f este continuă și în $x_0 + kT, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Demonstrație: Fie șirul x_n convergent la $x_0 + kT$. Fie $y_n = x_n - kT$ care converge la x_0. Atunci

$f(x_n) = f(x_n - kT) = f(y_n) \to f(x_0) = f(x_0 + kT)$

Deci $f(x_n) \to f(x_0 + kT)$ ceea ce încheie problema. •

Propoziția 4 Dacă f este continuă pe $[0,T]$ atunci este continuă pe $\mathbb{R}$.

Demonstrație: Continuitatea pe intervalul $[0,T]$ conduce la continuitatea pe orice interval de forma $\left[kT,(k+1)T\right], \forall k \in \mathbb{Z}$ conform propoziției anterioare, iar continuitatea pe $\mathbb{R}$ este consecința relației $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[kT,(k+1)T\right]$.•

Având în vedere mărginirea funcțiilor continue pe intervale compacte, putem spune că orice funcție periodică, continuă pe $[0,T]$ este mărginită pe acest interval și implicit pe $\mathbb{R}$

Rezultatele următoare se adresează elevilor clasei a XII-a. Cadrul general este următorul. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neconstantă, continuă, cu perioada principală $T>0$. Construim funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$.

Propoziția 5 Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $\int\limits_x^{x+T} f(t)dt = \int\limits_0^T f(t)dt$

Demonstrație: Considerăm funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, G(x) = \int\limits_x^{x+T} f(t)dt$.

Derivând avem $G'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$. Deci G este constantă și deci $G(x) = G(0), \quad \forall x\in\mathbb{R}$ ceea ce este echivalent cu relația din enunț.•

Propoziția 6 Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt$.

Demonstrație: Pentru orice $x\in\mathbb{R}_+$ $\exists n\in\mathbb{N}$ și $r_x \in [0,T)$ astfel încât $x = nT + r_x$.. Atunci

$$F(x) = \int\limits_0^T f(t)dt + \int\limits_T^{2T} f(t)dt + ... + \int\limits_{(n-1)T}^{nT} f(t)dt + \int\limits_{nT}^{x} f(t)dt \; = n\int\limits_0^T f(t)dt + \int\limits_{nT}^{nT+r_x} f(t)dt \; = n\int\limits_0^T f(t)dt + \int\limits_0^{r_x} f(t)dt$$

Notăm $a = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt$ și atunci

$F(x) = naT + \int\limits_0^{r_x} f(t)dt$ și

$$\left|\frac{F(x)}{x} - a\right| = \left|\frac{naT + \int\limits_0^{r_x} f(t)dt}{nT + r_x} - a\right| = \left|\frac{\int\limits_0^{r_x} f(t)dt - ar_x}{naT + r_x}\right|$$

. Ultima expresie are limita nulă deoarece numărătorul este o cantitate mărginită iar numitorul tinde la infinit când $x\to\infty$

Propoziția 7 Funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - ax$ este periodică, cu perioada principală T, unde $a = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt$

Demonstrație: Avem

$$G(x+T) - G(x) = F(x+T) + a(x+T) - F(x) - ax$$
$$= \int\limits_0^{x+T} f(t)dt + aT - \int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+T} f(t)dt - \int\limits_0^T f(t)dt = 0$$

ceea ce trebuia demonstrat. •

Ca și consecință a aspectelor teoretice menționate mai sus propun următoarea problemă spre rezolvare:

Problemă: Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2 + \{x\}(1-\{x\})$ unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Atunci:

a) arătați că $f(x+1) = f(x), \forall x\in\mathbb{R}$
b) calculați $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
c) demonstrați că f este continuă pe $\mathbb{R}$
d) calculați $F(1)$
e) determinați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției, axa Ox , dreapta $x=5$ și $x=6$
f) calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
g) calculați $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$
h) demonstrați că funcția F nu are asimptote la ∞

CANGURUL la Poiana Pinului

Înv. Boulescu Florica,Reșița

Organizată de Ministerul Educației și Cercetării și Fundația pentru Integrare Europeană Sigma, în perioada 27 iunie -3 iulie 2006 s-a desfășurat la Poiana Pinului, județul Buzău, tabăra națională Cangurul, pentru elevii claselor II-VI, selecționați în urma probelor de baraj.

Am însoțit lotul județului Caraș-Severin, compus din trei elevi :

- **Ciobanu Anca**, Școala cu clasele I-VIII Nr.2 Reșița, clasa a II-a
- **Țunea Adrian Marius**, Școala cu clasele I-VIII Nr.6 Reșița, clasa a IV-a
- **Petrea Bogdan Andrei**, Școala cu clasele I-VIII Nr.8 Caransebeș, clasa a V-a

În data de 29 iunie 2006, în tabără, a avut loc Concursul național de matematică Cangurul, la care au participat 236 de elevi din toate județele țării.

Reprezentanții județului nostru au obținut rezultate absolut remarcabile :

- **Ciobanu Anca** - premiul I (punctaj maxim), clasa a II-a
Școala cu clasele I-VIII Nr.2 Reșița

- **Petrea Bogdan Andrei** - premiul al II-lea, clasa a V-a
Școala cu clasele I-VIII Nr.8 Caransebeș

Programul taberei a cuprins diverse activități instructiv-educativ-recreative : ateliere de creație, matematică distractivă, redactarea revistei taberei, teatru interactiv, competiții sportive, jocuri, carnaval, la care elevii au participat cu interes și plăcere, având ocazia să se cunoască mai bine, să se împrieteneasca.

Felicitări tuturor elevilor participanți și cadrelor didactice care i-au pregătit și succes la edițiile viitoare ale Concursului de matematică Cangurul.

Probleme rezolvate din RMCS nr. 16

Clasa a IV-a

IV.011 Câtul împărțirii a două numere este 7 , iar restul 13. Aflați cele două numere știind că diferența lor este 613.

Înv. Marioara Popescu , Reșița

Răspuns: 713 și 100.

IV.012 În vacanță, Marius a citit luni , marți și miercuri o carte (a terminat-o !) . Miercuri a citit cu 100 de pagini mai mult decât luni și marți la un loc.Marius constată că miercuri a citit de trei ori mai mult și încă 4 pagini decât în primele două zile. Câte pagini a citit în fiecare zi și câte pagini are cartea dacă marți a citit de două ori mai multe decât luni ?

Înv. Marioara Popescu , Reșița

Răspuns : 16,32,148,deci cartea are 196 de pagini.

IV.013 Daniel este întrebat de tatăl său : " Câți elevi sunteți în clasă? " . Daniel răspunde : " Dacă ar mai fi încă o dată pe câți elevi sunt și încă pe jumătate și încă un sfert , împreună cu învățătorul ar fi 100 de persoane! " Câți colegi are Daniel ?

Inst. Ozana Sărin , Reșița

Răspuns: 36 de colegi sunt în clasă,deci Daniel are 35 de colegi.

IV.014 Câte caiete se pot cumpăra în loc de un dicționar , știind că un dicționar costă cât 10 cărți , 5 cărți cât un penar și două penare cât 5 stilouri , iar 10 stilouri cât 100 de caiete ?

Înv. Ana Modoran , Reșița

Răspuns: 50 de caiete.

IV.015 Într-o clasă sunt 30 de elevi. Câți băieți și câte fete sunt în clasă știind că dacă ar fi cu doi băieți mai puțin , atunci jumătate din numărul lor ar reprezenta de două ori mai mult decât o treime din numărul fetelor ?

Înv. Ana Modoran , Reșița

Răspuns: 12 fete,18 băieți.

IV.016 Mihai are 6 ani. Peste 6 ani , vârsta sa va fi exact de trei ori mai mică decât a mamei sale, iar a bunicului de două ori mai mare decat a fiicei sale. Ce vârstă are mama ? Dar bunicul ?

Petra-Ana Rogge , elevă, Reșița

Răspuns: Mama are 30 de ani , iar bunicul are 66 de ani.

IV.017 Dacă mărim două din laturile nealăturate ale unui pătrat cu câte 6 cm, figura obținută va avea perimetrul de 44 cm. Aflați aria figurii inițiale.

Inst. Lidia Todor , Caransebeș

Răspuns: $64cm^2$

IV.018 La un magazin de ceasuri, noul model are succes: în prima zi s-au vândut 2/ 5 din total și încă 5 ceasuri. A doua zi s-au vândut 1/ 4 din rest și încă 3 ceasuri. A treia zi s-au mai vândut 2/ 3 din câte rămăseseră și încă 2 ceasuri. În raft mai sunt 4 ceasuri. Câte ceasuri au fost aduse spre vânzare?

Inst. Lidia Todor , Caransebeș

Soluție: Folosim metoda drumului invers: $4+2=6$ reprezintă $\frac{1}{3}$ din numărul de ceasuri rămase pentru a treia zi,așadar $6\cdot 3=18$ ceasuri rămase pentru a treia zi. $18+3=21$ ceasuri reprezintă $\frac{3}{4}$ din numărul de ceasuri rămase pentru a doua zi. $(21:3)\cdot 4=28$ ceasuri au rămas deci pentru a doua zi. $28+5=33$ reprezintă $\frac{3}{5}$ din numărul inițial de ceasuri. $(33:3)\cdot 5=55$ de ceasuri au fost aduse spre vânzare.

IV.019 Trei persoane au mers cu o mașină pentru care au plătit 350 000 lei; prima persoană a mers 15 km, a doua 25 km și a treia 30 km. Cât a plătit fiecare pentru drumul parcurs?

Înv. Mirela Tătar , Caransebeș

Răspuns: 75000,125000,150000.

IV.020 Ioana propune prietenilor ei o problemă:
Andrei este fratele meu ; într-o zi el îmi spune : “ Am tot atâția frați câte surori am. “ . “ E adevărat , îi răspund eu , dar eu am de două ori mai mulți frați decât surori. “. Câți băieți și câte fete sunt în familia celor doi ?

* * *

Răspuns: 4 băieți și 3 fete.

IV.021 Jerry se găsește la 20 de pași de adăpostul său. Tom se găsește la 5 pași (de pisică! , eleva Irina Ciorogar a sesizat !) de șoricel . Când pisica face o săritură, Jerry face 3 pași , iar o săritură a pisicii este cât 10 pași de șoricel . Poate Tom să-l prindă pe Jerry ?

Concurs Bulgaria

Soluție: Pentru Tom sunt necesare 7 sărituri pentru a ajunge la adăpostul șoricelului;în 6 sărituri de –ale lui Tom,Jerry face $6\cdot 3=18$ pași,așadar șoricelului îi rămân 2 pași pentru a ajunge la adăpost ,iar cu al treilea pas se va ascunde,deci Tom nu-l prinde.Sunteți bucuroși? .

IV.022 Din Caransebeș pornește spre Constanța un automobil cu viteza de 45 km/oră. După trei ore, tot din Caransebeș pornește spre Constanța un alt automobil care se deplasează cu 60 km/oră. Aflați:
a)după câte ore al doilea automobil îl ajunge pe primul;
b)la ce distanță de Caransebeș se întâlnesc cele două automobile.

Înv. Mirela Tătar , Caransebeș

Răspuns: după 9 ore ; 540 km.

IV.023 Dublând suma a două numere naturale am obținut 150.Aflați diferența numerelor știind că primul este de patru ori mai mare decât al doilea.

Inst. Adriana Ursu , Caransebeș

Răspuns: 45.

IV.024 Un sac cu ciment cântărește de două ori mai mult decât un sac cu var. Dacă 7 saci cu var și 7 saci cu ciment cântăresc împreună 525 kg , cât cântărește un sac cu ciment ?

Inst.Mariana Ionescu , Caransebeș

Răspuns: 50 kg.

Clasa a V-a

V.034. Fie $a=726+728\cdot 726+729\cdot 3$

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției: „ a este pătrat perfect și cub perfect” .

Prof. Mariana Drăghici , Reșița

Soluție: $a = 726\,(1+728) + 729\cdot 3$; $a = 729^{2}$ și $a = \left(3^6\right)^2 = \left(3^4\right)^3 = 81^3$

Propoziția este adevărată.

V.035 Care dintre numerele 124^{228} și 626^{171} este mai mare ?

Prof. Mariana Drăghici , Reșița

Soluție: $124^{228} < 125^{228} = \left(5^3\right)^{228} = 5^{684} = 5^{4\cdot 171} = \left(5^4\right)^{171} = 625^{171} < 626^{171}$.

V.036 Să se determine cifrele a, b, astfel încât numărul $A=\overline{aabaa}$, scris în baza 10 să fie divizibil cu 109.

Prof. Loreta Ciulu , Reșița

Soluţie: Numărul A poate fi scris sub forma:

$A=\overline{aa0aa}+\overline{b00}=11011\cdot a+100\cdot b=(101\cdot 109+2)\cdot a+(109-9)\cdot b=$

$=101\cdot 109a+2a+109b-9b=109(101a+b)+2a-9b$.

Rezultă imediat că 2a-9b este divizibil cu 109.
Deoarece $a,b\in N, 0<a<9; 0<b<9$, numărul 2a-9b este divizibil cu 109, dacă 2a-9b=0. Rezultă că a=9 şi b=2, adică A=99299.

V.037 Se dă numărul $A=4^{n+1}\cdot 5^{2n+3}-2$, n

a) Găsiţi de câte ori apare cifra 9 în scrierea zecimală a lui A;

b) Arătaţi că numărul care reprezintă suma cifrelor lui A este divizibil cu 3 .

Prof. Zoran Ocanovici , Moldova-Nouă

Soluţie: a) $A=10^{2n+2}\cdot 5-2=1\underbrace{00...0}_{2n+2}\cdot 5-2=4\underbrace{99...9}_{2n+1}8$,deci cifra 9 este conţinută de 2n+1 ori; b) se obţine imediat că suma cifrelor lui A este $3(6n+7)$.

V.038 Se înşiră unul după altul toate numerele naturale de la 1 până la 2006 fără a lăsa spaţiu între ele şi fără a pune virgulă. Se obţine numărul n = 1234567891011...20052006.

a) Determinaţi câte cifre are acest număr ;

b) Aflaţi suma primelor 500 de cifre ale lui n .

Prof. Mariana Iancu , Oraviţa

Soluţie : a) Numărul cifrelor este $9+180+2700+4028=6917$; b) calcule destul de lungi conduc la suma cerută: 1907.

V.039 Determinaţi câte numere de 11 cifre încep şi se termină cu 2006.

Prof. Mariana Iancu , Oraviţa

Răspuns : 1000 de numere.

V.040 Găsiţi cel mai mare număr natural de forma $\overline{abab}$ care are cel mai mic număr de divizori.

Prof. Vasile Huza , Coronini

Soluţie: 9797.

V.041 Fie $N=2+2^2+2^3+...+2^{2006}$. Ştiind că x este suma dintre restul împărţirii lui N – 2006 la 10 şi un număr prim , iar k este un număr natural par astfel încât $2006=k\cdot x$,determinaţi valorile lui x .

Prof. Georgeta Bihoi , Reşiţa

Soluţie: Avem : $2N-N=N=2^{2007}-2$;deducem imediat : $u(N)=6$,de unde $u(N-2006)=0$ .Deducem apoi că x este număr prim (!) şi în final : $x\in\{17,59\}$.

V.042 a) Este numărul $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2006+2007$ pătrat perfect ?

b) Este numărul $b=(1+2+3+...+2000)\cdot 2001^{2000}+2006$ cub perfect ?

Prof. George Pascariu , Bozovici

Soluţie: a) $u(a)=0+7=7$,deci a nu este pătrat perfect; b) Observăm că $x=(1+2+3+...+2000)\cdot 2001^{2000}=(10\cdot 2001^{667})^3$ şi următorul cub perfect este $y=\left(10\cdot 2002^{667}\right)^3$ (!!) , deducem că b nu este cub perfect.

V.043 Arătaţi că n = 1 + 3 + 5 + ... + 2005 este pătrat perfect.

Prof. Nicolae Dragomir , Tudor Deaconu , Reşiţa

Soluţie: De exemplu,putem scrie: $n=2005+2003+...+5+3+1$,de unde $2n=(1+2005)+(3+2003)+...=1003\cdot 2006$,deci $n=1003^2$.(Generalizaţi rezultatul !) .

V.044 O foaie de hârtie este ruptă în 3 bucăţi ; una dintre acestea se rupe deasemenea în 3 bucăţi , apoi o bucată din cele avute se rupe din nou în 3 bucăţi . Continuând procedeul,se poate obţine un total de 2006 de bucăţi ? Dacă da , după câte operaţii ? Dar 2007 de bucăţi – se pot obţine ?

Prof. Heidi Feil , Oţelu-Roşu

Soluţie: După n operaţii avem $2(n-1)+3$ bucăţi.Din $2(n-1)+3=2006$ avem o egalitate între un număr par şi unul impar,adică absurd.Din $2(n-1)+3=2007$ obţinem însă $n=1004$.

V.045 Se consideră numărul $A=\overline{abbc}$.

a) Cifra a se înlocuieşte cu cifra d şi se obţine numărul $B=\overline{dbbe}$, astfel încât $e=c-d$ .Determinaţi câte numere A există pentru care $A-B=2006$;

b) Schimbând ordinea cifrelor lui A obţinem un număr C. Arătaţi că $A-C\neq 2006$.

Prof.Lucian Dragomir ,Oţelu-Roşu

Soluție: $1000\cdot(a-d)+(c-e)=2006 \Rightarrow a-d=2, c-e=6$;deducem imediat că $d=6, a=8, (c,e)\in\{(6,0),(7,1),(8,2),(9,3)\}$.Pe de altă parte $b\in\{0,1,2,...,9\} \Rightarrow 4\cdot 9=36$ de numere posibile.

V.046 Găsiți pătratele perfecte de forma $\overline{aabb}$.

Prof.Romanța și Ioan Ghiță, Blaj

Soluție: $\overline{aabb}=\overline{xy}^2, x\geq 3$;cum $\overline{aabb}$ este multiplu de 11,deducem că și $\overline{xy}$ are aceeași proprietate,de unde $x=y$.Se ajunge acum ușor la $7744=88^2$.

V.047 Dacă a < b sunt numere naturale consecutive , arătați că:

$b^n-ab^{n-1}-ab^{n-2}-...-ab^2-ab=b$, n , n 2.

Prof. Afilon Moica , Zăvoi

Soluție: Conform ipotezei avem $b-a=1$;în membrul stâng avem succesiv:

$b^n-ab^{n-1}=b^{n-1}(b-a)=b^{n-1}, b^{n-1}-ab^{n-2}=b^{n-2}(b-a)=b^{n-2},...,$

$b^2-ab=b(b-a)=b.$

V.048 Determinați numerele naturale nenule care împărțite la 5 dau câtul a și restul b și împărțite la 9 dau câtul b și restul a . Câte soluții are problema ?

Prof. Adriana Dragomir , Oțelu-Roșu

Soluție: $n=5a+b, b<5$ și $n=9b+a, a<9$;deducem acum: $a=2b$ și considerăm $b\in\{1,2,3,4\}$.Obținem numerele : 11,22,33,44.

Clasa a VI-a

VI.034 Să se determine trei numere prime având suma egală cu 44 , știind că unul dintre ele este de forma $\overline{aa}$.

Prof. Emilia-Dana Schiha , Berzasca

Soluție: 2 , 11 , 31. (singurul număr prim de forma $\overline{aa}$ este 11)

VI.035 Să se calculeze suma tuturor numerelor de forma $\overline{ababab}$ știind că fiecare astfel de număr are exact 24 de divizori și $\overline{ab}$ este număr prim.

Prof. Marius Șandru , Reșița

Soluție : Folosim : $\overline{ababab}=\overline{ab}\cdot 10101=\overline{ab}\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 37$; ajungem la numerele : 131313 și 373737,iar suma cerută 505050.

VI.036 Bisectoarele a două unghiuri adiacente formează un unghi cu măsura de 60^0.Aflați măsura fiecărui unghi știind că măsura unuia este de patru ori mai mare decât a celuilalt.

Prof. Vasile Huza , Coronini

Soluție : $24^0, 96^0$

VI.037 Găsiți numerele naturale x și y , x y , care satisfac :

$$3^x+3^y=738$$

Prof. Vasile Huza , Coronini

Soluție: $3^x\cdot(1+3^{y-x})=3^2\cdot 82$;deducem $x=2, y=6$ (arătați cum !).

VI.038 În triunghiul ABC $m(\angle B)+m(\angle C)$ reprezintă 0,8 din $m(\angle A)$,iar $m(\angle B)-m(\angle C)=10^0$.Aflați:

a) Măsurile unghiurilor tringhiului ABC;

b) Măsura unghiului format de bisectoarea lui $\angle BAC$ și înălțimea din B.

Prof. Ion Belci , Reșița

Soluție : a) $100^0, 45^0, 35^0$; b) considerăm $BH\perp AC, H\in AC, iar.(AD$ bisectoarea lui $\measuredangle BAC$.Notăm $AD\cap BH=\{E\}\Rightarrow m(\measuredangle EHA)=90^0, m(\measuredangle DAC)=50^0 \Rightarrow m(\measuredangle AHE)=40^0$

.

VI.039 După o mărire de 2 %, apoi alta de 3 % , urmată de o reducere a prețului cu 4 % , o imprimantă costă 504,288 lei (noi). Cât a costat inițial imprimanta ?

Prof. Emilia – Dana Schiha , Berzasca

Soluție : 500 lei.

VI.040 Câte triunghiuri cu laturile de lungimi numere naturale există știind că numai o latură a unui astfel de triunghi are lungimea strict mai mare decât 3 ?

Prof. Romanța și Ioan Ghiță, Blaj

Soluție: $c>3, c\in\mathbb{N}, a,b\in\{1,2,3\}$.Deosebim cazurile:

(1) $a=b=1$ (absurd deoarece nu e satisfăcută condiția $1+1>c$);

(2) $a=b=2$ (absurd din motive analoage);

(3) $a=b=3\Rightarrow c\in\{4,5\}$;avem deci două triunghiuri (isoscele);

(4) $a=1, b=2$ (absurd) ; (5) $a=1, b=3$ (absurd);

(6) $a=2, b=3\Rightarrow c=4$.Există deci trei triunghiuri care satisfac enunțul.

VI.041 17 puncte situate în plan determină 46 de drepte. Aflați câte dintre punctele date sunt coliniare.

Prof. Liviu Smarandache , Craiova

Soluție: Dacă n puncte din cele date sunt necoliniare,atunci 17- n sunt coliniare.Numărul dreptelor determinate de cele 17 – n puncte coliniare este 1.Cele n necoliniare determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte și mai avem $n(17-n)$ drepte care se obțin unind un punct din cele necoliniare cu câte unul din cele coliniare.Din $1+\frac{n(n-1)}{2}+n(17-n)=46$ deducem $n=3$,deci 14 puncte sunt coliniare.

VI.042 Arătați că numărul $A = 200...06$ nu poate fi pătrat perfect (indiferent câte cifre de 0 avem) .

Prof. Adriana Dragomir , Oțelu-Roșu

Soluție : Se știe că suma cifrelor unui număr natural este congruentă modulo 9 cu numărul (rețineți dacă nu știați !) ;se arată astfel că un număr natural n nu este pătrat perfect dacă $n \equiv 2,3,5,6,8 (\bmod 9)$.În cazul nostru $2006 \equiv 8 (\bmod 9)$. (Sau,fiind număr par,A ar fi pătrat perfect dacă în primul rând s-ar divide cu 4).

VI.043 În pătratul unui număr a , de mai multe cifre , pe locul zecilor se află cifra 7. Ce cifră se află pe locul unităților în numărul a^2 ?

Concurs Ungaria

Soluție: Arătăm că ultima cifră a pătratului unui număr întreg este 6 atunci când pe locul zecilor este o cifră impară: fie c ultima cifră a numărului a ;avem atunci că a + c este par , iar a – c se divide cu 10,de unde $a^2-c^2=(a+c)(a-c)$ se divide cu 20,deci ultima cifră a lui a^2 și c^2 este aceeași,iar cifra aflată pe locul zecilor este sau pară în ambele cazuri sau impară în ambele cazuri.

În pătratul numerelor formate dintr-o singură cifră,pe locul zecilor se află o cifră impară numai în cazul $4^2=16$ și $6^2=36$,iar ultima cifră este 6.De aici se deduce că a^2 are pe locul zecilor o cifră impară numai dacă se termină cu 4 sau cu 6 și în toate aceste cazuri ultima cifră a lui a^2 este 6. Să mai remarcăm că există numere care satisfac enunțul,de exemplu $24^2=576$.

VI.044 În anul 1066 la Hastings s-a dat o mare bătălie între oștile saxone și cele normande. Pe țărm , saxonii au format un pătrat, iar pe plajă

normanzii au format alt pătrat . Se spune că normanzii întreceau pe saxoni cu 500 de pedestrași și 12 călăreți. Atacând cu mult curaj , saxonii au ucis jumătate din cotropitori , ei nepierzând decât o cincime din ostași.La sfârșitul bătăliei cele două tabere aveau exact același număr de oameni. Câți saxoni și câți normanzi au luat parte la luptă?

* * *

Soluție : Notăm cu x numărul normanzilor de pe o latură a pătratului lor și cu y cel al saxonilor de pe o latură a formației saxone de luptă;conform ipotezei avem : $x^2-y^2=512$ sau $(x-y)(x+y)=512$. Descompunem pe 512 în factori primi și analizăm mai atent datele problemei(jumătate din x este apropiat de y^2 !!) ; studiem cazurile ce apar și ajungem la unica soluție : $x=36, y=28$ .La începutul bătăliei normanzii erau 1296,iar saxonii 784.

VI.045 Pe un cerc se așează la întâmplare 5 numere naturale a căror sumă este egală cu 18. Arătați că există cel puțin două numere alăturate a și b astfel încât $a + b \geq 8$.

* * *

Soluție : Dacă $a+b \le 7, b+c \le 7, c+d \le 7, d+e \le 7, e+a \le 7$,atunci : $2(a+b+c+d+e) \le 35$,contradicție cu $a+b+c+d+e=18$.

VI.046 Considerăm segmentul [AB] de lungime 1 m . În interiorul segmentului desenăm cu culoare roșie punctele $C_1, C_2, \ldots, C_{24}$, care împart [AB] în segmente congruente de lungime 4 cm. Colorăm apoi cu albastru punctele $D_1, D_2, \ldots, D_{19}$ care împart [AB] în segmente congruente de lungime 5 cm. Precizați câte puncte albastre se suprapun peste puncte roșii și câte segmente de lungime 1 cm apar pe desen.(enunț corectat).

Prof. Mihai Monea , Deva

Soluție : Un punct roșu și unul albastru se suprapun dacă și numai dacă există $k \in \{1,2,...,24\}, l \in \{1,2,...,19\}$ astfel încât $AC_k = AD_l$ .Cum $AC_k = 4k, AD_l = 5l \Rightarrow 4k = 5l$,deci k e multiplu de 5 și l e multiplu de 4 .Există 4 puncte care se suprapun : $C_5 = D_4, C_{10} = D_8, C_{15} = D_{12}, C_{20} = D_{16}$. Pe segmentul $[AC_5]$ avem două segmente de lungime 1cm : $[C_1D_1], [D_3C_4]$;situația se repetă de 5 ori,avem deci 10 segmente de lungime 1cm.

VI.047 Determinați toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$ (a , b *) cu proprietatea că , adunând și la numitor și la numărător același număr x > 0 , obținem o putere cu exponent natural a fracției inițiale .

Căutăm fracțiile de forma $\frac{a}{b}$ ($a,\ b \in \mathbb{N}^*$) cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât (1) $\frac{a+x}{b+x} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Singurele fracții care verifică (1) sunt cele echiunitare. Într-adevăr, putem scrie $\frac{a+x}{b+x} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \Leftrightarrow (a+x)b^n = (b+x)a^n \Leftrightarrow ab^n - a^n b + xb^n - xa^n = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow ab\left(b^{n-1} - a^{n-1}\right) + x\left(b^n - a^n\right) = 0$$

și deducem că singura posibilitate de realizare a egalității este ca numerele a și b să fie egale.În caz contrar, dacă $a < b$, atunci

$$ab\left(b^{n-1} - a^{n-1}\right) + x\left(b^n - a^n\right) > 0,$$

iar dacă $a > b$, atunci $ab\left(b^{n-1} - a^{n-1}\right) + x\left(b^n - a^n\right) < 0.$

În concluzie, fracțiile $\frac{a}{b}$ ($a,\ b \in \mathbb{N}^*$) care verifică relația (1) sunt cele pentru care $a = b$ și numai acestea.

VI.048 Fiecare element al mulțimii A = { 1 , 2 , 3 , … , 100 } se colorează cu una dintre culorile roșu , galben sau albastru , respectând următoarele reguli;

a) suma dintre orice număr galben și orice număr albastru este divizibilă cu 3 ;

b) suma oricăror două numere roșii este divizibilă cu 3.

1) Arătați că numărul 3 este roșu ;

2) Calculați suma tuturor numerelor care nu sunt roșii .

Prof.Marius Damian , Brăila

Soluție: **a)** Dacă, prin absurd, numărul 3 nu ar fi roșu, atunci el ar fi galben sau albastru.

Dacă 3 ar fi galben, atunci, din condiția i) deducem că numerele 6, 9, 12, ..., 99 sunt galbene sau albastre, iar celelalte numere: 1, 2, 4, 5, 7, 8, ..., 97, 98 sunt roșii. Cum $1+4=5$ care nu este multiplu de 3, se contrazice condiția ii).

Dacă 3 ar fi albastru, printr-un raționament asemănător, obținem din nou contradicție.

În concluzie, numărul 3 este roșu

b) Din a) rezultă că toate numerele: 3, 6, 9, ..., 93, 96, 99 sunt roșii. In plus, acestea sunt singurele numere roșii, deoarece, în caz contrar, dacă un număr nedivizibil cu 3 ar fi roșu, atunci s-ar contrazice condiția ii).

Suma numerelor care nu sunt roșii este așadar:

$$S = (1+2+...+100) - (3+6+...+99) = (1+2+...+100) -$$
$$-3(1+2+...+33) = \frac{100\cdot 101}{2} - 3\cdot\frac{33\cdot 34}{2} = 3367.$$

Clasa a VII-a

VII.034 În triunghiul ABC bisectoarele interioare ale unghiurilor B și C intersectează mediana $[AD]$ în M și N astfel încât $[AM] \equiv [MN] \equiv [ND]$. Să se determine aria triunghiului ABC știind că NC=14 cm.

Prof. Mariana Drăghici , Reșița

Soluție: Din $\frac{AN}{AD} = \frac{2}{3}$ și $[AD]$-mediană în triunghiul ABC, rezultă că N este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Fie $[CE$ bisectoarea unghiului ACB și E∈AB. În triunghiul ABC, $[CE$ este bisectoare și mediană, N∈ CE , deci este isoscel cu $[AC] \equiv [BC]$.

E fiind mijlocul laturii $[AB]$, rezultă CE=$\frac{3}{2}CN = 21$ cm.

În triunghiul ABD aplicând teorema bisectoarei obținem $\frac{AB}{BD} = \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$, de unde AB=$\frac{1}{4}BC$.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ACE obținem AB = $2\sqrt{7}$.

$S_{ABC} = \frac{AB\cdot CE}{2} = \frac{21\cdot 2\sqrt{7}}{2} = 21\sqrt{7}$.

VII. 035 Pentru câte valori naturale ale lui n, expresia

$\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}$ este număr întreg?

Prof. Loreta Ciulu , Reșița

Soluție: Fracția dată se poate scrie $-\frac{2\sqrt{n}+\sqrt{7}}{\sqrt{n}-2\sqrt{7}}=-2-\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{n}-2\sqrt{7}}$, care este număr întreg dacă $\sqrt{n}-2\sqrt{7}$ divide pe $5\sqrt{7}$. Rezultă că $\sqrt{n}-2\sqrt{7}$ poate fi $-\sqrt{7}$, $+\sqrt{7}$, $-5\sqrt{7}$ și $+5\sqrt{7}$, adică $\sqrt{n}-2\sqrt{7}=-\sqrt{7}\Rightarrow\sqrt{n}=\sqrt{7}\Rightarrow n=7$. Analizăm și celelalte cazuri posibile și ajungem la : $n\in\{7;63;343\}$ adică pentru trei valori naturale.

VII. 036 Se consideră un triunghi ABC și punctele M , N , P pe laturile [BC] , [AC] , respectiv [AB] astfel încât : $\frac{BM}{BC}=\frac{CN}{CA}=\frac{AP}{AB}=\frac{1}{3}$

Dacă E este mijlocul lui[NP] și F mijlocul lui [BC] , demonstrați că EF este paralelă cu AM și $EF=\frac{1}{2}AM$.

Prof. Nicolae Stăniloiu , Bocșa

Soluție: Fie T un punct pe (BC) astfel ca $CT=\frac{1}{3}CB$ .Deducem că TNAP este paralelogram,deci AT trece prin mijlocul lui(PN),adică A,E,T sunt coliniare și E este mijlocul lui (AT);cum F este mijlocul lui(MT) , avem că EF este linie mijlocie în ATM , de unde concluzia e imediată.

VII. 037 Rezolvați în   ecuația : $xy+3y-5x-17=0$.

Prof. Emilia-Dana Schiha , Berzasca

Soluție simplă: Scrieți ecuația sub forma $(x+3)(y-5)=2$ și nu uitați că sunteți în $\mathbb{Z}$ (dacă cumva nu ați fost atenți) .

VII. 038 Demonstrați că dacă a , b , c sunt lungimile laturilor unui triunghi , atunci : $\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right|<1$.

Prof. Nicolae Dragomir,Tudor Deaconu,Reșița

Soluție: Calcule multe , dar rezultatul merită.Aducem la același numitor,adăugăm și scădem la numărător produsul abc și numărătorul va deveni $(a-b)(b-c)(c-a)$ .Folosim acum inegalitățile între laturile unui triunghi.

VII.039 Câte numere de forma $\overline{abcde}$ sunt divizibile cu 11 și satisfac $a+e=b+d$. ?

Prof. Nicolae Stăniloiu , Bocșa

Soluție: Cam mult de numărat,dar hai să vedem.Fie $N=a-b+c-d+e$; trebuie să remarcăm rapid că $\overline{abcde}$ se divide cu 11 dacă și numai dacă N se divide cu 11 (de ce ? faceți N - $\overline{abcde}$).Să mai sesizăm că $N=c$,deci există atâtea numere din cele căutate câte numere $\overline{abed}$ satisfac $a+e=b+d$ și sunt divizibile cu 11, $a\neq 0$ .Vom obține cu ceva calcule $819-204=615$ numere.

VII. 040 Determinați numerele reale x $\frac{2}{3}$ pentru care :

$$x-\sqrt{\frac{x}{3}-\frac{2}{9}}=\frac{2}{3}.$$

Prof. Ion Belci , Reșița

Idee: Ecuația se poate scrie $x-\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{x}{3}-\frac{2}{9}}$;se împarte cu 3 și se notează $y=\sqrt{\frac{x}{3}-\frac{2}{9}}$,de unde $y\in\{0,1\}$;continuați.

VII. 041 Determinați x * și y prim pentru care $\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}=3$.

Prof. Dumitru Bătineț-Giurgiu , București

Soluție: Ecuația se poate scrie : $y=x(3-x)$ .Cum y este prim ,deducem: $x=1, y=2$ sau $x=y=2$ (fals) .

VII.042 Determinați x care satisface : $\sqrt{1+2^0+2^1+...+2^{499}}=2^x$.

Prof. Lenuța Andrei , Craiova

Soluție: $\sqrt{2^{500}}=2^x\Rightarrow x=250$.

VII.043 Arătați că ecuația $x^2+y^2+z^2=2007$ nu are soluții în   .

Prof. Adriana Dragomir , Oțelu-Roșu

Soluție: Pentru orice $x\in\mathbb{Z}, x^2\equiv k(\bmod 8)$,unde $k\in\{0,1,4\}$ .Deducem că $(x^2+y^2+z^2)\equiv y(\bmod 8), y\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ .Pe de altă parte avem $2007\equiv 7(\bmod 8)$.

VII.044 Determinați restul împărțirii la 7 a numărului

$$A=76^{2007}+78^{2006} .$$

Prof. Heidi Feil , Oțelu-Roșu

Soluție: O posibilă rezolvare este următoarea:
$(77-1)^{2007} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$,iar $(77+1)^{2006} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$,așadar restul cerut este 0.

VII.045 O mulțime A având 4 elemente numere raționale se numește ***interesantă*** dacă: $x \in A \Rightarrow 2x \in A$ sau $\frac{x}{2} \in A$. Notăm $S_n = \{ 1 , 2 , 3 , ... , n \}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați câte submulțimi ***interesante*** are S_{10} ;

b) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care S_{2n} are cel puțin 2006 de submulțimi ***interesante.***

Prof.Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

Remarcă:La această problemă am primit o singură încercare de soluție,astfel că așteptăm încă (poate chiar comentarii,poate chiar ale profesorilor).

VII.046 Fie ABC un triunghi , I centrul cercului său înscris și $AI \cap BC = \{D\}$. O dreaptă perpendiculară pe AI intersectează (AB) și (AC) în punctele P și respectiv Q;notăm cu M și N simetricele lui P și Q față de dreptele BI și respectiv CI.

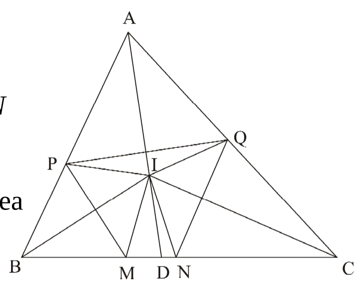
Demonstrați că MD = DN dacă și numai dacă AB = AC.

Prof.Marius Damian , Brăila

Soluție: Dreapta AI este mediatoarea segmentului PQ; atunci:

(1) $IP = IQ.$

Ținând cont că $(BI$ și $(CI$ sunt bisectoare, deducem că punctele M și N sunt situate pe latura BC.



Totodată, BI este mediatoarea segmentului (PM), de unde rezultă:

(2) $IP = IM,$ iar CI este mediatoarea segmentului (QN), deci: (3) $IQ = IN.$

Din (1), (2) și (3), obținem $IM = IN,$ deci triunghiul IMN este isoscel. Trecem la justificarea celor două implicații.

"$\Rightarrow$": Dacă $MD = DN,$ atunci, ținând cont că ΔIMN este isoscel, rezultă că $ID \perp MN,$ adică $AD \perp BC.$ De aici și din faptul că $(AD$ este bisectoarea unghiului BAC, urmează că triunghiul ABC aste isoscel, cu $AB = AC.$

"$\Leftarrow$": Dacă $AB = AC,$ atunci, ținând cont că $(AD$ este bisectoarea unghiului BAC, rezultă că $AD \perp BC,$ adică $ID \perp MN.$ De aici și din faptul că ΔIMN este isoscel, urmează că $MD = DN.$

VII.047 . a) Arătați că dacă a, b , c $\in \mathbb{R}$ și $a+b+c=6$, atunci $a^2+b^2+c^2 \geq 12$

b) Rezolvați ecuația : $\sqrt{x-y+3}+\sqrt{3y-2x+4}+\sqrt{x-2y+5}=6$

Prof. Petrișor Neagoe , Anina

Soluție : a) Există mai multe posibilități de a obține inegalitatea dată; de exemplu , cu inegalitatea CBS :
$(1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2 = 36 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$; concluzia e imediată.
Evident , egalitatea se obține dacă și numai dacă a = b = c .

b) notăm radicalii din membrul stâng cu a , b , respectiv c ; deoarece $a+b+c=6$, deducem $a^2+b^2+c^2 \geq 12$; efectuând însă calculele avem că $a^2+b^2+c^2=12$, așadar egalitate , care se obține pentru a = b = c = 2 . Avem imediat : x = 3 și y = 2 .

VII.048 Demonstrați că orice triunghi cu aria mai mare decât 1 nu poate avea perimetrul mai mic decât 4 .

Prof.Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

Soluție : cu notațiile uzuale avem p , p- a , p- b , p- c > 0 , deci putem folosi inegalitatea mediilor : $\sqrt{p(p-a)} \leq \frac{p+p-a}{2} = \frac{b+c}{2}$ și $\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}$; folosind formula lui Heron avem astfel că aria triunghiului satisface : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} < \frac{a(b+c)}{4}$; la fel (alegând altfel) obținem $S < \frac{b(c+a)}{4}$ și $S < \frac{c(a+b)}{4}$

Deducem : $3 < 3 \cdot S < \frac{ab+bc+ca}{2}$, de unde $ab+bc+ca > 6$

Si folosim $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3(ab+bc+ca)$

de unde $(a+b+c)^2 > 18$ a + b + c > $\sqrt{18}$ > 4 .

Clasa a VIII-a

VIII.034 Să se determine numerele naturale pătrate perfecte de forma $4n^2$ -15, n $\in$ **N.**

Prof. Mariana Drăghici , Reşiţa

Soluţie: Fie $m^2 = 4n^2 - 15 \Rightarrow$ 15 = (2n-m) (2n+m). Cum $n \in \mathbb{N}$, avem cazurile:

$$\begin{cases} 2n-m=3 \\ 2n+m=5 \end{cases} \text{sau} \begin{cases} 2n-m=5 \\ 2n+m=3 \end{cases} \text{sau} \begin{cases} 2n-m=15 \\ 2n+m=1 \end{cases} \text{sau} \begin{cases} 2n-m=1 \\ 2n+m=15 \end{cases},$$

de unde n= 2, m= ± 1 sau n = 4 , m = ± 7 , deci m^2 = 1 sau m^2 = 49 sunt numerele naturale cerute în enunţ.

VIII.035 Fie numerele reale x, y cu proprietăţile: $x - 6y + 2 = 0$ şi $x \in [-2;4]$.Să se determine numărul

$$a = \sqrt{x^2+y^2+4x+4} + \sqrt{x^2+y^2-8x-2y+17}\ .$$

Prof. Loreta Ciulu , Reşiţa

Soluţie: a $= \sqrt{(x+2)^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}$

Din $x-6y+2=0$ găsim $x+2=6y$ şi $x-4=6y-6$.

Cum $-2 \leq x \leq 4$, rezultă $0 \leq x+2 \leq 6$ şi $0 \leq 6y \leq 6$ sau $0 \leq y \leq 1$.

Deci, $a = \sqrt{(6y)^2+y^2} + \sqrt{[6(y-1)]^2+(y-1)^2} = \sqrt{37y^2} + \sqrt{37(y-1)^2} =$

$= |y|\sqrt{37} + |y-1|\sqrt{37} = y\sqrt{37} + (1-y)\sqrt{37} = (y+1-y)\sqrt{37} = \sqrt{37}$

VIII.036 Determinaţi numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n$ care satisfac:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \geq 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 \geq 0 \\ .... \\ 3x_{n-1} - 5x_n + 2x_2 \geq 0 \\ 3x_n - 5x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = na \end{cases} \text{, a} \quad .$$

Prof. Nicolae Stăniloiu , Bocşa

Soluţie: Adunăm inegalităţile date şi avem $0 \geq 0$,aşadar nici o inegalitate nu poate fi strictă;deducem că toate sunt egalităţi şi apoi avem :

$$\begin{cases} 3(x_1 - x_2) = 2(x_2 - x_3) \\ 3(x_2 - x_3) = 2(x_2 - x_3) \\ .... \\ 3(x_n - x_1) = 2(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Dacă oricare două numere x_k sunt diferite,prin înmulţirea egalităţilor anterioare ajungem la o egalitate absurdă;deducem în final că: $x_k = a, \forall k = \overline{1,n}$.

VIII.037 Determinaţi câte perechi (x , y) de numere întregi satisfac: $x^2 + y^2 = 3x - y$

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir , Oţelu-Roşu

Soluţie: Înmulţind egalitatea dată cu 4 avem:

$(2x-3)^2 + (2y+1)^2 = 10$.(În $\mathbb{Z}$ avem doar $1+9=10, 9+1=10$)

Ajungem în final la 8 soluţii.

VIII.038 Fie ABCD un dreptunghi .Arătaţi că nu există un punct M în spaţiu , nesituat în planul dreptunghiului dat ,astfel încât :

$MD \perp (ABCD)$, $m(\angle MBC) = 60^0$ şi $m(\angle MBA) = 30^0$.

Prof. Ion Belci , Reşiţa

Idee:Evident,reducere la absurd şi apoi e cam simplu.

VIII.039 Determinaţi funcţiile f : care satisfac :

f (x – 2) 7 – 2x şi f (2 – x) 2x – 1 , x .

Prof. Mirela Rădoi , Reşiţa

Soluţie: Notaţi $x - 2 = t \Rightarrow f(t) \leq -2t + 3$,apoi $2 - x = t$;se ajunge la : $f(t) = -2t + 3$.

VIII. 040 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi α un plan care trece prin mijlocul M al ipotenuzei şi este perpendicular pe mediana AM. Demonstraţi că există β astfel încât pentru orice punct P α să avem : $\beta \cdot PA^2 = PB^2 + PC^2$.

Prof. Vasile Huza , Coronini

Soluție: Cu teorema lui Pitagora și teorema medianei se ajunge destul de rapid la $\beta = 2$.

VIII.041 Un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $a, b, c \in (0,1]$ are aria totală 2s . Demonstrați că:

$$\frac{a+x}{b} + \frac{b+x}{c} + \frac{c+x}{a} \geq 3 + s \cdot x \ , \quad x \quad {}_+ .$$

Prof. Dumitru Bătineţu-Giurgiu , București

Soluție: $E(x) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot x \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} +$

$+ \frac{x}{abc} \cdot (ab + bc + ca) = 3 + \frac{1}{abc} \cdot sx \geq 3 + sx$.

VIII.042 Fie a , b , c   astfel încât :

$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc = 1$ .Arătați că: $|b| \leq \sqrt{2}$.

Prof. Mirela Genoiu , Craiova

Soluție: $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{2} + \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 = 1$ conduce

la : $\frac{b^2}{2} \leq 1$;concluzia e imediată.

VIII.043 Demonstrați inegalitatea :

$$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} \geq \frac{1}{2}$$

Prof. Liviu Smarandache , Craiova

Soluție: Se notează numitorii cu a, b ,c se determină x , y , z în funcție de a,b,c și se folosește $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}}$.

VIII.044 O clădire are 72 de etaje și este dotată cu un lift special. Dacă se apasă butonul galben liftul urcă 7 etaje , iar dacă se apasă butonul verde liftul coboară 9 etaje (dacă una din aceste comenzi nu e realizabilă liftul rămâne pe loc) . Putem ajunge cu acest lift de la etajul 1 la etajul 72 ?

Concurs Bulgaria

Soluție: Dacă urcăm de n ori și coborâm de m ori , ajungând la etajul 72,avem: $72 = 1 + 7n - 9m$ (1) , unde $n, m \in \mathbb{N}$ .Deducem că 1 * 7n e multiplu de 9,deci n poate fi : 5,14,… Dacă $n = 5$,ecuația (1) nu are

soluții naturale.Dacă $n = 14 \Rightarrow m = 3$,deci problema are soluții.(Pentru a nu bloca liftul procedăm astfel:apăsăm de două ori pe butonul gakben,apoi o dată pe cel verde,din nou galben,apoi verde,galben,verde și până la sfârșit de zece ori galben !).

VIII.045 a) Arătați că pentru orice x , y > 0 avem :

$$x^3 + y^3 \geq x^2 y + xy^2 \ ;$$

b) Dacă x , y , z > 0 , demonstrați că:

$$3 + \frac{z-y}{x} + \frac{x-z}{y} + \frac{y-x}{z} \leq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} .$$

Prof. Marius Damian , Brăila

Soluție: **a)** Avem:

$$x^3 + y^3 \geq x^2 \cdot y + x \cdot y^2 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x-y) - y^2 \cdot (x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \cdot (x+y) \geq 0,$$

inegalitate evidentă.**b)** Împărțind prin $x \cdot y^2$ inegalitatea demonstrată mai sus, aceasta se scrie: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \geq \frac{x}{y} + 1$ și echivalent: $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} + 1 \leq \frac{x^2}{y^2}$. Au loc și inegalitățile analoage: $\frac{y}{z} - \frac{z}{y} + 1 \leq \frac{y^2}{z^2}$, $\frac{z}{x} - \frac{x}{z} + 1 \leq \frac{z^2}{x^2}$. Prin sumarea ultimelor trei inegalități, se obține concluzia.

VIII.046 Numărul x are 4n cifre , toate egale cu 3 , numărul y are 2n cifre , toate egale cu 9 . Determinați cel mai mic număr natural z pentru care numărul $A = 3x + 2y + z$ este pătrat perfect pentru orice n * .

Prof.Marian Bădoi , Oravița

Soluție: $x = \underbrace{33...3}_{\text{4n ori}} = 3\left(10^{4n-1} + ... + 1\right) = 3 \cdot \frac{10^{4n} - 1}{9}$, $y = \underbrace{99...9}_{\text{2n ori}} = 9 \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9}$,

deci $A = 10^{4n} + 2 \cdot 10^{2n} + 3 + z = \left(10^{2n} + 1\right)^2 - 4 + z$, așadar $z = 4$.

VIII.047 . Determinați numerele raționale x și y pentru care există m , n   astfel încât $x + y = m$ și $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = n$.

Prof. Nicolae Dragomir , Prof. Tudor Deaconu , Reșița

Soluție: x , y   a , b , c , d   cu $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ (fracții ireductibile) ; cum $x + y = \frac{ad + bc}{bd}$, avem că b / d și d / b

$b = \pm d$; analog se obține , din $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = n$, $a = \pm c$.

Așadar $x = \pm y$; cum $x + y \geq 1$, rămâne posibil doar x = y .

Din x = y = 2x = $\frac{2a}{b}$ și $\frac{2}{x} = \frac{2b}{a}$ (numere naturale) , deducem că a

și b sunt divizori ai lui 2 și $\frac{a}{b} > 0$ $\frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$ sau $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ sau

$\frac{a}{b} = \frac{2}{1} = 2$, de unde obținem : x = y = 1 sau x = y = 2 sau x = y = $\frac{1}{2}$

Variantă: Ecuația cu rădăcinile x , y este

$nt^2 - mnt + m = 0$ și impunem condiția ca discriminantul ei să fie pătrat perfect . Sigur merge și așa .

VIII.048 Determinați numerele naturale nenule n pentru care există numerele naturale $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 3n \quad \text{și} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{4n}.$$

Prof. Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

Soluție: Folosind inegalitatea mediilor $\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$, egalitățile din

enunț conduc la $\frac{3n}{n} \geq \frac{n}{\frac{4n+1}{n}}$ de unde $4n^2 \leq 12n + 3$; cum $n \in \mathbb{N}^*$,

deducem $n \in \{1,2,3\}$.Acum trebuie să vedem dacă există $x_k \in \mathbb{N}$! .

Pentru n = 1 avem imediat $x_1 = 3$ și $\frac{1}{x_1} = \frac{5}{4}$, absurd .

Pentru n = 2 obținem $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{9}{8} \end{cases}$; imediat avem că acest sistem nu are soluții naturale ;

Pentru n = 3 , avem : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{13}{12} \end{cases}$

Presupunem $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ și vom avea $3x_1 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 3x_3$

$x_1 \leq 3 , x_3 \geq 3$

Se analizează rapid fiecare caz în parte ($x_1 = 1$ nu conduce la soluții naturale pentru celelalte două numere)

Dacă $x_1 = 2$, avem imediat $x_2 = 3$ și $x_3 = 4$.

Deci n = 3 , $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$ (sau permutări) .

Clasa a IX-a

IX. 034 Fie ABC un triunghi și AD , BE , CF trei ceviene concurente în P. Determinați poziția punctului P dacă $\frac{PA^2}{PD^2} + \frac{PB^2}{PE^2} + \frac{PC^2}{PF^2} = 12$.

Prof. Nicolae Stăniloiu , Bocșa

Soluție: Notăm $\frac{PA}{PD} = a, \frac{PB}{PE} = b, \frac{PC}{PF} = c$ și folosim

$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$ .Mai folosim relațiile lui Van Aubel și

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .Deducem că cevienele sunt mediane,deci P este centrul de greutate al triunghiului.

IX.035 Demonstrați că:

$$\sqrt{2} \cdot (x + y - \sqrt{xy}) \geq \sqrt{x^2 + y^2} \ , \quad x , y \in \mathbb{R}_+^*$$

Prof. Dumitru Bătinețu-Giurgiu , București

Soluție: Notăm $\frac{x}{y} = t^2 \Rightarrow x = yt^2$;înlocuim și ,cu grijă,vom ajunge la

inegalitatea echivalentă $(t - 1)^4 \geq 0$.

IX.036 Demonstrați că un patrulater ABCD convex și ortodiagonal este romb dacă și numai dacă

$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Prof. Daniel Jinga , Pitești

Idee: Notăm $AC \cap BD = \{O\}$ și ne jucăm cu teorema lui Pitagora.

IX.037 Determinați funcțiile f : care verifică:

$f(x^4+y^3+z^2+t)=f(x)+f(y^2)+f(z^3)+f(t^4)$, x,y,z,t .

Anca Tuțescu , elevă, Craiova

Soluție: Facem $x=y=z=t=0\Rightarrow f(0)=0$;dacă $y=z=0$,atunci avem: $f(x^4+t)=f(x)+f(t^4),\forall x,t\in\mathbb{R}$;pentru $t=-x^4\Rightarrow f(x)+f(x^{16})=0,\forall x\in\mathbb{R}$,așadar $f(x^{16})=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}$ (1) . Pentru $y=z=t=0\Rightarrow f(x^4)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$,de unde $f(x^{16})=f((x^4)^4)=f(x^4)=f(x)$ (2) .

Din (1) și (2) deducem $f(x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}$,adică f este funcția constant nulă.

IX.038 Rezolvați ecuația :

$$\left[\frac{x+1}{4}\right]+\left[\frac{x+2}{4}\right]+\left[\frac{x+3}{4}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]+\frac{x-1}{2}\ .$$

Dragoș Ungura□, elev , Oțelu-Roșu

Soluție: Folosim identitatea Hermite $[t]+\left[t+\frac{1}{4}\right]+\left[t+\frac{2}{4}\right]+\left[t+\frac{3}{4}\right]=[4t],\forall t\in\mathbb{R}$ .Notăm $x=4t$ și ecuația dată devine $\left[t+\frac{1}{4}\right]+\left[t+\frac{2}{4}\right]+\left[t+\frac{3}{4}\right]=\left[2t+\frac{1}{2}\right]+\frac{4t-1}{2}$;deducem că există $k\in\mathbb{Z},\frac{4t-1}{2}=k\Rightarrow t=\frac{2k+1}{4}$ și, folosind identitatea Hermite,

$$\Rightarrow[4t]-[t]=\left[2t+\frac{1}{2}\right]+k \text{ sau } [2k+1]-\left[\frac{2k+1}{4}\right]=2k+1\Rightarrow\left[\frac{2k+1}{4}\right]=0.$$

Imediat avem $k\in\{0,1\}\Rightarrow t\in\left\{\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right\}\Rightarrow x\in\{1,3\}$.

IX.039 Determinați câte elemente are mulțimea

$\{$ x / $x^2\cdot(x+1)\cdot(x+3)=2x+1$ $\}$.

Prof. Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

Idee: $x^2\cdot(x+1)\cdot(x+3)=(x^2+x)(x^2+3x)$ și notăm $y=x^2+2x$.

IX.040 Demonstrați că există o ecuație de gradul al doilea cu coeficienți întregi care are o rădăcină egală cu $ctg\,22{,}5^0$.

Concurs Ungaria

Soluție: Se arată imediat că $ctg\frac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}$ (am prefera să primim o soluție geometrică a acestui rezultat !!) ; considerăm atunci $1-\sqrt{2}$ ca fiind cealaltă rădăcină și obținem,de exemplu,ecuația $x^2-2x-1=0$.

IX.041 Demonstrați că o progresie aritmetică infinită și neconstantă nu poate avea toți termenii numere prime.

Concurs Ungaria

Soluție: Dacă r este rația progresiei și a_k un termen oarecare al acesteia,avem : $a_{k+m}=a_k+mr$;rația r este un număr natural , primul termen este cel puțin 1 , deci termenii următori sunt mai mari ca 1.Dacă $a_k>1$ și $m=a_k$,atunci $a_{k+m}=a_k+a_kr=a_k(1+r)$ este un număr compus.

IX.042 În paralelogramul ABCD o paralelă la AC intersectează dreptele AB si AC în punctele M și N (M∈AB, N∈BC). Paralela d_1 prin M la BC și paralela d_2 prin N la AB se intersectează în E. Notăm cu P mijlocul segmentului [MN], cu T mijlocul lui [RS], unde {R}= $d_1\cap$ AC,{S} = d_2 AC.Demonstrați, prin două metode, că punctele B,D,E,P,T sunt coliniare.

Prof. Mircea Iucu , Reșița

Soluție: În paralelogramul MBNE , P = mijlocul diagonalei [MN] deci B,P,E coliniare (1)În paralelogramul ABCD ,T = mijlocul diagonalei [AC] deci B,D,T coliniare. (2)

MNSR este trapez unde B,P,E sunt coliniare.(intersectia diagonalelor și mijloacelor laturilor paralele sunt coliniare) (3).

Din (1),(2),(3) rezulta B,D,E,P,T sunt coliniare.

Varianta 2 reprezintă o metodă vectorială pe care,din lipsa spațiului,nu o vom prezenta aici.

IX.043 Rezolvați în mulțimea $_+$ sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} xy+yz+zx=1 \\ \frac{1-x^2}{1+x^x}+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Prof. Aurel Doboșan , Lugoj

Soluţie : Deoarece $x, y, z > 0 \Rightarrow \exists a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aşa încât :

$x = tg\frac{a}{2}, y = tg\frac{b}{2}, z = tg\frac{c}{2}, a+b+c=\pi, xy+yz+zx = ... = 1$.Folosim apoi $\frac{1-x^2}{1+x^x}+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2} = \cos a+\cos b+\cos c = \frac{3}{2}$. Se ştie însă că într-un tringhi avem $\cos a+\cos b+\cos c \le \frac{3}{2}$,cu egalitate doar dacă $a=b=c=\frac{\pi}{3}$.Obţinem imediat soluţia sistemului : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Clasa a X-a

X. 034 Demonstraţi că pentru orice x 0 şi n , n 2 , este adevărată inegalitatea : $\sum_{k=1}^{n}\frac{(2+x)^k}{2+kx} \ge 2^n - 1$

Prof. Dorin Mărghidanu , Corabia

Soluţie şi generalizare : Dacă a , x ≥ 0 , folosind formula binomului lui Newton , avem :

$(a + x)^k = a^k + k \cdot a^{k-1} \cdot x$ + (o valoare pozitivă) ≥ $a^{k-1} \cdot (a + k \cdot x)$,

cu egalitate pentru k = 1 , sau când x = 0 si (∀) k ∈ **N** .

Deci , $\frac{(a+x)^k}{a+x.k} \ge a^{k-1}$ şi prin urmare , $\sum_{k=1}^{n}\frac{(a+x)^k}{a+x.k} \ge \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} = \frac{a^n-1}{a-1}$

Pentru a = 2 , se obtine inegalitatea dinenună.

X.035 Determinaţi numerele naturale n pentru care dezvoltarea $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5})^n$ conţine exact 5 termeni raţionali.

* * *

Răspuns : $n \in \{24, 26, 27, 28, 29, 31\}$.

X.036 Dacă x , y $_+$ şi x + y = 2 , determinaţi valoarea maximă a sumei $S = \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}$.

Prof. Lucian Dragomir , Oţelu-Roşu

Soluţie: $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{1\cdot x\cdot x}+\sqrt[3]{1\cdot y\cdot y} \le \frac{1+x+x}{3}+\frac{1+y+y}{3} = 2$

Aşadar valoarea maximă este 2 (se obţine dacă $x = y = 1$) .

X.037 Dacă a , b , c sunt numere reale strict pozitive cu $a+b+c=1$, demonstraţi că: $\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{1+c}{1-c} \ge 8$.

Gazeta Matematică

Soluţie: Aplicăm inegalitatea lui Jensen funcţiei convexe

$f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{2}{1-x}-1\right)$.

X.038 Demonstraţi că în scrierea numărului $(\sqrt{2501}+50)^{1981}$ ca număr zecimal primele 3962 cifre după virgulă sunt zerouri.

Prof. D.M.Bătineţu-Giurgiu , Bucureşti

Soluţie:

$A = (\sqrt{2501}+50)^{1981} = (\sqrt{2501}+50)^{1981} - (\sqrt{2501}-50)^{1981} + (\sqrt{2501}-50)^{1981} =$

$= B + (\sqrt{2501}-50)^{1981} = B + \frac{1}{(\sqrt{2501}+50)^{1981}}, B \in \mathbb{N}^*$ Obţinem că

$A = \overline{B,C}, C \in (0,1), C = \frac{1}{(\sqrt{2501}+50)^{1981}} \Rightarrow 0 < C < \frac{1}{(50+50)^{1981}} =$

$= \frac{1}{100^{1981}} = \frac{1}{10^{3962}} \Rightarrow C < 0,\underbrace{00...01}_{3962}.$

X.039 Fie f : A B . Arătaţi că f este injectivă dacă şi numai dacă $(\forall)X, Y \subset A$ cu $f(X) \subset f(Y)$ $X \subset Y$.

* * *

Soluţie: (1) Fie $(\forall)X, Y \subset A$ oarecare cu $f(X) \subset f(Y)$;pentru orice $a \in X \Rightarrow f(a) \in f(X) \subset f(Y) \Rightarrow \exists b \in Y$ astfel încât $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ (deoarece f este injectivă),deci $a \in Y. \Rightarrow X \subset Y$.

(2)Reciproc,fie $a, b \in X$, $f(a) = f(b)$ .Din $f(\{a\}) \subset f(\{b\}) \Rightarrow \{a\} \subset \{b\} \Rightarrow a = b$,adică f este injectivă.

X.040 Să se determine funcţia f : care satisface :

$f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, x , y şi $f(2006) = 3^{2006}$

Prof. D.M.Bătineţu-Giurgiu , Bucureşti

Soluţie: Prin inducţie(eventual)avem: $f(n) = 3^n$

X.041 a) Calculaţi suma $S=\sum_{k=1}^{n} k\cdot C_n^k$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) Demonstraţi că: $n\cdot 2^n \geq (n+1)(2^n-1)$, $\forall n \geq 1$;

c) Demonstraţi că: $n\cdot 3^n \geq 2^n\cdot(2^n-1)$, $\forall n \geq 1$.

Cosmin Istodor , elev , Oţelu-Roşu

Soluţie: a)Folosim $\sum_1^n k\cdot C_n^k = n\cdot 2^{n-1}, \sum_1^n C_n^k = 2^n-1, \sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ şi inegalitatea lui Cebâşev: $n\cdot\sum_1^n k\cdot C_n^k \geq (\sum_1^n k)(\sum_1^n C_n^k)$;

b) din nou Cebâşev : $n\cdot(\sum_0^n 2^k\cdot C_n^k) \geq (\sum_0^n C_n^k)(\sum_0^n 2^k)$.

X.042 Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$ şi $|z|<1$, $|z+1|<1$, atunci $|z^3+1|<4$.

Prof. Aurel Doboşan , Lugoj

Soluţie : $|z^3+1| = |(z+1)^3-3z(z+1)| \leq |(z+1)^3| + |3z(z+1)| =$

$= |z+1|^3 + 3|z|\cdot|z+1| < 4.$

X.043 Rezolvaţi ecuaţia : $136^x+225^x = 64^x+255^x$.

Prof. Aurel Doboşan , Lugoj

Soluţie : Calcule destul de rapide conduc la : $\left(15^x-8^x\right)\left(15^x+8^x-17^x\right)=0$.

Obţinem soluţiile $x=0, x=2$ (unicitatea celei de a doua se obţine folosind monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(\frac{8}{17}\right)^x+\left(\frac{15}{17}\right)^x$) .

Clasa a XI-a

XI. 034 Dacă f : [a , b] $\to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă cu proprietatea că f(a) = 0 , demonstraţi că există c $\in$ (a , b) astfel încât $f(c)=(b-c)\cdot f'(c)$.

Prof. Dorin Mărghidanu , Corabia

Soluţie : Considerăm funcţia $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, g (x) = (b – x) $\cdot$ f(x), care este de asemenea derivabilă şi în plus g (a) = g (b) = 0 .

Cu teorema lui Rolle deducem că există c $\in$ (a , b) , astfel încât g'(c) = 0 . Cum g'(x) = - f (x) + (b – x). f '(x) , rezultă că f (c) + (b – c).f '(c) = 0 .

XI.035 Fie f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă, mărginită, cu $f(0)\neq 0$. Arătaţi că există x_1 , x_2 $\in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, astfel încât :

$$x_1\cdot f(x_2)+x_2\cdot f(x_1)=0 .$$

Prof. Lucian Dragomir , Oţelu – Roşu

Soluţie : f mărginită

$\Rightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$ .Considerăm funcţiile continue $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x, h(x)=f(x)+x$ şi din $g(m)g(M)\leq 0, h(m)h(M)\leq 0$ deducem că $\exists x_1, x_2 \in [m,M]$ astfel încât $g(x_1)=0, h(x_2)=0$,adică $f(x_1)=x_1, f(x_2)=-x_2$.Înmulţim aceste două egalităţi cu x_2 ,respectiv cu x_1 şi le adunăm. (E nevoie de ipotezele $f(0)\neq 0$ şi $x_1\neq x_2$? Puteţi da un exemplu de funcţie f care satisface enunţul ?).

XI.036 Dacă f $:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă şi cu derivata funcţie periodică, arătaţi că f se poate scrie ca o sumă dintre o funcţie periodică şi o funcţie de gradul întâi.

Prof.Dorin Mărghidanu , Corabia

Soluţie: Cum f $'$ este periodică , ($\exists$) T > 0 , astfel încât f $'$(x + T) = f $'$(x)

Deci f(x + T) şi f(x) diferă printr-o constantă k $\in$ **R ,** adică ,

$$f(x+T)-f(x)=k \qquad (1)$$

Fie funcţia $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \phi(x)=f(x)-\frac{k}{T}\cdot x$ (2)

Un calcul imediat conduce la $\phi(x+T)-\phi(x)=0$, deci ϕ este periodică de perioada T . Din (2) , avem $f(x)=\phi(x)+\frac{k}{T}\cdot x$, care răspunde cerinţelor enunţului .

XI.037 Calculaţi $\lim_{n\to\infty} arctg(\log_2\{\sqrt{n^2+n+1}\})$, unde {x} reprezintă partea fracţionară a lui x.

Prof. Nicoleta Bran , Craiova

Soluție : $\left\{\sqrt{n^2+n+1}\right\}=\sqrt{n^2+n+1}-\left[\sqrt{n^2+n+1}\right]=\sqrt{n^2+n+1}-n$;limita este $L=\lim\limits_{n\to\infty} arctg \log_2 \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n^2+n+1}}=-\dfrac{\pi}{4}$.

XI. 038 Fie f o funcție care are proprietatea lui Darboux și care satisface $f\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=x$, x > 0 . Demonstrați că f este continuă.

Prof. Ionuț Ivănescu , Craiova

Soluție : Considerăm $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ și se obține imediat că $g(g(x))=x, \forall x>0$,adică $g\circ g=1_{\mathbb{R}}$;deducem că g este injectivă,apoi continuă, de unde f este continuă.

XI.039 Determinați funcțiile continue f : care satisfac :

$$\frac{x}{y}\cdot f(y)+\frac{y}{x}\cdot f(x)=\frac{2f(xy)}{xy}\ ,\quad x\ ,\ y\ {}^{*}.$$

Prof. Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

Soluție : Facem $x=y\Rightarrow x^2\cdot f(x)=f(x^2), \forall x\in\mathbb{R}^*$.Facem succesiv transformarea $x\to x^{\frac{1}{2}}$ și înmulțim egalitățile obținute,deducem astfel : $x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}\cdot f(x^{\frac{1}{2^{n+1}}})=f(x)$.Trecem la limită pentru $n\to\infty$,folosim continuitatea lui f și ajungem la : $f(x)=ax^2, a=f(1)\in\mathbb{R}$.

XI.040 Determinați n * și matricele inversabile A $\mathcal{M}_n($ $)$ pentru care $(A^*)^*=A^*$, unde A * este adjuncta matricei A.

Prof. Romanța și Ioan Ghiță, Blaj

Răspuns: Dacă $d=\det A$,se deduce : $(d^{n-1})^2=d^{n^2-n}\Rightarrow n\in\{1,2\}$.

Verificări simple conduc la $A=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}, a\in\mathbb{C}^*$.

XI.041 Se consideră un pătrat cu latura de lungime 1 . Ducem câte două drepte paralele la laturile pătratului și acesta se împarte în 9 pătrate congruente;eliminăm pătratul din mijloc.Cele 8 pătrate rămase le împărțim în mod analog în câte 9 pătrate și din nou din fiecare eliminăm pătrățelul din mijloc ,etc. Repetăm procedeul de n ori.

a) Câte pătrate cu latura de lungime $\dfrac{1}{3^n}$ rămân ?

b) Dacă notăm cu S (n) aria totală a pătratelor eliminate , calculați $\lim\limits_{n\to\infty} S(n)$.

Concurs Ungaria

Soluție: a) La prima împărțire , eliminând un pătrat din cele 9 obținute,rămân 8 pătrate;după a doua împărțire,eliminând 8 pătrate din cele $8\cdot 9$ obținute,rămân 8^2 pătrate.Continuând procedeul,după n împărțiri,rămân 8^n pătrate;latura fiecăruia va fi $\dfrac{1}{3^n}$; b) aria totală a pătratelor rămase este $8^n\cdot\left(\dfrac{1}{3^n}\right)^2=\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$ și astfel $S(n)=1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$;evident ,limita cerută este egală cu 1 .

XI.042 a) Arătați că pentru orice matrice A , B $\mathcal{M}_2($ $)$ are loc relația : $\det(A+B)+\det(A\_B)=2(\det A+\det B)$;

b) Dacă X , Y $\mathcal{M}_2($ $)$ astfel încât

$$\det(X^2+Y^2)+\det(XY+YX)=\frac{1}{2}\ ,$$

atunci $\det(X+Y)+\det(X-Y)\le\sqrt{2}$.

Prof. Marius Damian , Brăila

Soluție: **a)** Fie funcția polinomială

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\det(A+xB).$$

Există $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=\det A+kx+x^2\det B.$

Atunci $f(1)+f(-1)=\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det A+\det B).$

b) În egalitatea de la punctul precedent facem $A=X^2+Y^2$, $B=XY+YX$ și obținem

$$\left[\det(X+Y)\right]^2+\left[\det(X-Y)\right]^2=2\left[\det\left(X^2+Y^2\right)+\det(XY+YX)\right].$$

De aici, ținând cont de ipoteză și de inegalitatea Cauchy - Schwarz, putem scrie

$$\left[\det\left(X+Y\right)+\det\left(X-Y\right)\right]^2 \le 2\cdot\left[\det\left(X+Y\right)\right]^2+\left[\det\left(X-Y\right)\right]^2 =$$

$=4\cdot\left[\det\left(X^2+Y^2\right)+\det\left(XY+YX\right)\right]=2$ şi concluzia rezultă imediat.

XI.043 Se consideră şirul definit prin $x_1=\frac{26}{5}$,

$5x_{n+1}=13x_n+12\cdot\sqrt{x_n^{\,2}-4}$, $n \ge 1$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{5^n}\right)^n$.

Prof. Aurel Doboşan , Lugoj

Soluţie: $x_n=5^n+\frac{1}{5^n}$ (inducţie) şi limita cerută este 1 .

XI.044 a) Calculaţi $\sin\frac{\pi}{12}$;

b) Fiind date matricele $X=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$,calculaţi

$\left(X+Y\right)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Prof. Aurel Doboşan , Lugoj

Soluţie: $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot X+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot Y=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\alpha=\frac{\pi}{12}$;se demonstrează

inductiv : $\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos nt & -\sin nt\\ \sin nt & \cos nt\end{pmatrix}$ şi astfel matricea

cerută este egală cu : $2^{3n}\cdot\begin{pmatrix}\cos u & -\sin u\\ \sin u & \cos u\end{pmatrix},u=\frac{n\pi}{6},n\in\mathbb{N}^*$.

Clasa a XII-a

XII. 034 Fie a , b > 0 , a < b şi funcţia continuă f : [a , b] $\to \mathbb{R}_+^*$. Dacă

$\int\limits_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}dx=\int\limits_a^b f(x)dx$, arătaţi că există c $\in$ (a , b)

astfel încât $(a+b)\cdot f(c)=c$.

Prof. Dumitru Bătineţu-Giurgiu , Bucureşti

Soluţie: Facem schimbarea de variabilă destul de bine cunoscută $x=a+b-t$ .Notând cu I integrala din dreapta vom ajunge la $I=\frac{b-a}{2}$ şi ,folosind ipoteza: $I=\frac{1}{a+b}\cdot\int\limits_a^b xdx$ .Acum ajungem la :

$\int\limits_a^b \left(f(x)-\frac{x}{a+b}\right)dx=0$ .Aplicaţi teorema de medie !.

XII.035 Fie $(G,\cdot)$ un grup şi a , b $\in$ G , $a,b\ne e$, a , b distincte . Dacă $ab^2=b^4$ şi $b^5=a^2$,determinaţi ordinele elementelor a şi b .

Prof. Romanţa şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie: Înmulţiri la stânga şi la dreapta cu tot felul de puteri (trebuie să aveţi răbdare şi nervi) conduc la $b^2=e;b\ne e\Rightarrow ord(b)=2$ .Din $b^5=a^2$ deducem $a^4=e\Rightarrow ord(a)=4$ (nu se poate mai mic;ar putea fi doar 2 , dar asta ar conduce la $b^5=e$ şi mai departe la o contradicţie.

XII.036 Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{2n}+\sin\frac{4}{2n}+...+\sin\frac{2n}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}+\sin\frac{3}{2n}+...+\sin\frac{2n-1}{2n}}$

Prof. Viorel Cornea , Dan Ştefan Marinescu , Hunedoara

Soluţie: Notăm $a_n=\sin\frac{2}{2n}+\sin\frac{4}{2n}+...+\sin\frac{2n}{2n}$ şi

$b_n=\sin\frac{1}{2n}+\sin\frac{3}{2n}+...+\sin\frac{2n-1}{2n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^1\sin xdx}{\int\limits_0^1\sin xdx-\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^1\sin xdx}=1$

XII.037 Fie G un grup multiplicativ şi a , b $\in$ G astfel încât $a^{10}=b^{10}$ şi $a^{17}=b^{17}$. Demonstraţi că a = b .

Prof. Aurel Doboşan , Lugoj

Soluţie : Din $a^{17}=b^{17}$ deducem $a^7=b^7$,apoi din $a^{10}=b^{10}$ avem $a^3=b^3$,mai departe $a^7=b^7$ conduce la $a^4=b^4$,de unde $a=b$.

XII.038 Arătaţi că există q astfel încât :

$$\int_1^e \arcsin(\ln x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx = q\cdot\pi\cdot e .$$

Prof. Aurel Doboşan , Lugoj

Soluţie : Putem (şi altfel) folosi egalitatea lui Young : dacă $f:[a,b]\to[c,d]$ e continuă şi bijectivă, atunci $\int_a^b f(x)dx+\int_c^d f^{-1}(x)dx = bd-ac$ .E suficient să alegem $f:[1,e]\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right], f(x)=\arcsin(\ln x)$.

XII.039 Care dintre următoarele numere este mai mare :

$$a=\int_{-2}^{3} arctgxdx \quad \text{sau} \quad b=\int_{-3}^{2} arctgxdx \quad ?$$

Gazeta Matematică

Soluţie: $a=\int_{-2}^{3} arctgxdx=\int_{-2}^{2} arctgxdx+\int_{2}^{3} arctgxdx = A+B$ şi

$b=\int_{-3}^{2} arctgxdx=\int_{-3}^{-2} arctgxdx+\int_{-2}^{2} arctgxdx = C+A$;deoarece

$arctgx<0,\forall x<0$ şi $arctgx>0,\forall x>0 \Rightarrow B>C \Rightarrow a>b.$

XII. 040 Există funcţii f : continue care admit o primitivă F pentru care $f(F(x))+x^3+x=0$, x ?

Prof. Antoanela Buzescu , Caransebeş

Soluţie: Presupunem că există funcţii cu proprietatea din enunţ;

g : , $g(x)=-x^3-x$ este strict crescătoare , deci injectivă

$f\circ F = g$ injectivă F injectivă; F derivabilă F continuă şi deci F este strict monotonă $F' = f$ păstrează semn constant pe (*)

$f(F(-1))=2>0$ şi $f(F(1))=-2<0$ contradicţie cu (*) .

XII.041 Calculaţi : $I=\int \frac{e^x}{tg^2x\cdot\sin x}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Prof. Nicolae Dragomir , Reşiţa ,Prof.CarmenDragomir,Timişoara

Soluţie:

$$I=-\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)'+\frac{1}{\sin x}\right]\cdot e^x dx=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)'e^x dx-\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{\sin x}dx=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}e^x+\frac{1}{2}\int\frac{e^x(\cos x-\sin x)}{\sin^2 x}dx=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}e^x-\frac{1}{2}\int\left(\frac{e^x}{\sin x}\right)'dx=$$

$$=-\frac{e^x}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin x}\right)+C \ .$$

XII. 042 Se consideră mulţimea de matrice $\mathcal{M}$ = $\left\{\begin{pmatrix}2x+1 & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ 6x & 0 & 3x+1\end{pmatrix} / x\in\Re, x\neq\frac{1}{5}\right\}$ şi notăm G = { $\frac{1}{5}$ } . Dacă pentru orice x , y notăm $x\circ y = x+y+5xy$, arătaţi că $\mathcal{M}$ are o structură de grup în raport cu înmulţirea matricelor , izomorf cu grupul (G , ∘) .

Prof. Nicolae Dragomir , Prof. Tudor Deaconu , Reşiţa

Soluţie : Notăm cu M (x) o matrice din mulţimea dată şi avem

$M(x)=E+xA$, unde $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\6&0&3\end{pmatrix}$; calcule simple : $E^2=E, EA=AE=A, A^2=5A$

$M(x)M(y)=M(x+y+5xy)$ $\mathcal{M}$; în plus , se arată că

$x+y+5xy\neq-\frac{1}{5}$, x , y $\neq -\frac{1}{5}$; verificarea axiomelor grupului devine astfel imediată, elementul neutru este M (0) , etc.

Funcţia f : G M , f (x) = M (x) este bijectivă şi verifică condiţia de morfism .

XII.043 Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ având elementul neutru e .
Arătați că dacă există un morfism injectiv $f : G \to G$ pentru care avem $f(f(x))\cdot f(x) = e$, $\forall x \in G$, atunci G este abelian .

Prof. Lucian Dragomir ,Oțelu-Roșu

Soluție : Din ipoteză $\Rightarrow f(f(x)) = \left(f(x)\right)^{-1}$ și înlocuind x cu f (x) avem $f(f(f(x))) = (f(f(x))^{-1} = \left(f(x)^{-1}\right)^{-1} = f(x)$.

Cum f este injectivă avem că $f(f(x)) = x$ deci $(f(x))^{-1} = x$, adică $f(x) = x^{-1}$;

Faptul că această funcție este morfism se scrie deci $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, $\forall x, y \in G$, adică $xy = (x^{-1}y^{-1})^{-1} = yx$, $\forall x, y \in G$, așadar G este abelian .

Concursul Județean al Revistei de Matematică Caraș-Severin , Ediția a II-a

Regulament

Ediția a II a a Concursului Revistei este în plină desfășurare , urmează un nou set de probleme.Fiecare elev trebuie să rezolve (subliniem din nou: **singur ! ;** altfel e posibil să vă treziți calificați la concurs și acolo să nu faceți mare lucru , dați naștere la întrebări și credem că nici n-o să vă simțiți prea bine), așadar să rezolve cât mai multe probleme **de la clasa sa , de la clasa precedentă sau de la orice clasă superioară** (am avut anul acesta multe situații și de acest gen). Redactați îngrijit fiecare problemă pe câte o **foaie separată** (enunț + autor + soluție + numele vostru) , completați talonul de concurs de pe ultima pagină a revistei și trimiteți totul **într-un plic (încercați să fie unul ceva mai mare , format A5 cel puțin** -nu înghesuiți tot în ceva mic) adresat astfel :

Prof.Lucian Dragomir , Grup Școlar Industrial Oțelu-Roșu, str.Republicii 10-12, 325700, Oțelu-Roșu, Caraș-Severin, cu mențiunea "probleme rezolvate". Insistăm asupra trimiterilor în plic (nu în folii de plastic) și asupra respectării cu strictețe a termenelor finale indicate de fiecare dată - plicurile primite după data limită nu vor fi luate în considerare.

După data limită de trimitere a soluțiilor, acestea sunt evaluate și în numărulul următor al revistei vor fi publicați toți rezolvatorii cu punctajele obținute.

La ediția a II-a a concursului vor fi selectați concurenții în funcție de punctajele obținute din rezolvarea problemelor publicate în numerele 15, 16 , 17 și 18 ale revistei noastre. În jurul datei de 20 ianuarie 2007 se va întocmi clasamentul general (prin însumarea punctelor obținute) și astfel primii clasați(în jur de 10 de clasă și care au minim din jumătatea punctajului maxim posibil) vor fi invitați, împreună, ca și la ediția precedentă, să participe la concurs; acesta va avea loc tot la începutul lunii februarie într-un oraș care va fi anunțat în timp util .

Subiectele vor fi alese tot din probleme de genul RMCS sau G.M. sau ceva cât de cât nou. Noutatea ediției din acest an constă în faptul că ne adresăm de-acum și elevilor de **ciclu primar.**

Demarăm cu această ocazie și un concurs (cu premii din nou) de probleme propuse de către elevi; acestea trebuie trimise în plic separat de eventualele probleme rezolvate, cu mențiunea " Probleme Propuse " . Încercați ! Oricum , n-o să vă pară rău .

Spor la treabă tuturor : elevi , profesori , părinți sau prieteni !

(*Informații suplimentare se pot obține la : prof. Lucian Dragomir , tel: 0255/530303 sau 0722/883537).*

Notă : Rugăm toți colaboratorii care ne trimit probleme propuse ***(obligatoriu cu soluții !)*** , note, articole, etc., să tehnoredacteze materialele pe calculator și să le atașeze ca fișier la mesajul lor, apoi să folosească adresa **: *lucidrag@yahoo.com*** (cu mențiunea : materiale pentru RMCS) .

Probleme propuse
(pentru participare la concurs și nu numai)

(Data limită de trimitere a soluțiilor : **30 octombrie 2006**)

Clasa a IV-a

IV.025 Într-o cușcă se află iepuri de casă și fazani , în total 100 de picioare și 36 de capete. Câți fazani și câți iepuri de casă sunt în cușcă?

Inst.Ozana Săcărin , Reșița

IV.026. 6 muncitori execută 288 piese în 4 ore. Câte piese vor executa 10 muncitori în 5 ore ?

Inst.Ozana Săcărin , Reșița

IV.027. Dan și Alina au vândut unui centru de achiziții a fructelor 166 de kg de căpșuni.Câte kg a vândut fiecare dacă Dan a vândut cu 6 kg mai mult decât Alina ?

Inst.Ozana Săcărin , Reșița

IV.028. Suma a două numere este 40,iar diferența lor este dublul celui mai mic dintre ele.Aflați numerele.

* * *

IV.029. Lucia și Maria au împreună 16 mere.Dacă Lucia are de 3 ori mai multe mere decât Maria,câte mere are fiecare ?

* * *

IV.030. Mă gândesc la un număr.Îl împart la 2;noul număr îl împart la 3 și observ că am obținut un număr cu 35 mai mic decât cel de la început.Puteți găsi numărul la care m-am gândit ?

* * *

IV.031. Andrei,Bebe și Costel colecționează mașinuțe.Andrei are de două ori mai multe decât Bebe,iar Costel de trei ori mai puține decât Bebe.Câte mașinuțe are fiecare dacă împreună au 50 de bucăți ?

* * *

IV.032. În câte feluri se poate completa un tabel cu numerele 1,2,3,respectând regulile :
1)pe fiecare linie să avem toate numerele;
2)suma numerelor de pe fiecare linie să fie aceeași
3)suma numerelor de pe fiecare coloană să fie aceeași ?

* * *

IV.033. Un tren circulă,cu aceeași viteză,între localitățile A și D,trecând prin orașele B și C.

A **B** **C** **D**

Se știe că distanța dintre A și B e parcursă într-o oră,distanța dintre B și C în jumătate de oră,iar distanța dintre C și D în două ore.Dacă între B și D sunt 250 km , care este distanța dintre A și C ?

* * *

IV.034. Athos,Porthos și Aramis au învins în dueluri 140 de dușmani.Dacă ar fi învins cu 10 luptători mai mult,Porthos ar fi învins tot atâția cât Athos,iar dacă ar fi învins cu 20 mai puțin,ar fi câștigat tot atâtea dueluri ca și Aramis.Câți inamici a învins fiecare dintre cei trei mușchetari ?

* * *

IV.035. Dintre Anca,Bianca,Cristina,Dorel,Elena,Florin și Gheorghiță,profesorul de sport trebuie să aleagă o echipă formată din două fete și un băiat.În câte feluri poate face alegerea ?

* * *

IV.036. Bunicul lui Mihai are o livadă cu peste 90 de pomi.O treime sunt pruni,un sfert sunt cireși,iar restul sunt meri.Câți pomi sunt în livadă știind că sunt mai puțin de 100 ?

* * *

IV.037. Tatăl lui Mihai este zidar.Pentru a construi un zid el dispune de 240 de cărămizi de formă paralelipipedică cu dimensiunile de 5 cm , 8 cm și 25 cm. Dacă grosimea zidului trebuie să fie de 8 cm și lungimea de 1 m , poate fi zidul mai înalt decât Mihai ?

* * *

IV.038. În campionatul de fotbal al României se acordă 3 puncte echipei care câștigă meciul,echipa care pierde nu primește nici un punct , iar în caz de egalitate fiecare echipă primește câte un punct.Echipa favorită a lui Sergiu este *Poli Timișoara* (normal,e bănățean);dacă după 27 de meciuri , *Poli* are 51 de puncte , câte meciuri a pierdut , știind că 9 meciuri a încheiat la egalitate ?

* * *

IV.039. Sergiu,Sorin și Costel se întrec în fiecare zi la matematică.Luni,e rândul lui Costel să le propună o problemă: Dacă numărului 84 îi asociez numărul 12, iar numărului 42 îi asociez 6 , ce număr asociez lui 52 ? După un minut (gândesc rapid băieții) , Sergiu zice : 7 , iar Sorin : 8.Cine a câștigat concursul de luni ?

IV.040. Gheorghiță păzea pe un imaș câțiva berbecuți și niște bobocei de gâscă. Întrebat de verișorul său Ionuț câți berbecuți și câți bobocei are, el a răspuns: - Sunt 26 capete și 70 picioare.

Ajutați-l pe Ionuț să găsească răspunsul la întrebare.

Inst. Mariana Mitrică, Șc. Nr. 9, Reșița

IV.041. Scrieți numărul 1092 ca o sumă de trei termeni astfel încât fiecare termen să fie dublul precedentului.

Inst. Mariana Mitrică, Șc. Nr. 9, Reșița

IV.042. Se consideră șirul de numere : 1 ; 6 ; 11 ; 16 ; ………..
a) Completați șirul cu încă doi termeni ;
b) Gasiți al 100-lea termen.

Înv. Ana Modoran,Reșița

Clasa a V-a

V.049 Fie mulțimile:

$$M_1=\{1\};\ M_2=\{1;3\};\ M_3=\{1;3;6\};$$
$$M_4=\{1;3;6;10\};\ M_5=\{1;3;6;10;15\};.....$$

a) Arătați că există $k,p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $55\in M_k-M_p$.

b) Există $t\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $2006\in M_t$?

c) Aflați numărul elementelor divizibile cu 5 din M_{2006}.

Prof. Nicolae Stănică, Brăila

V.050 Se dă șirul de numere: 1; 1; 2; 5; 12; 27; 58; …

a) Completați șirul cu următorii trei termeni.

b) Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului.

Prof. Marius Damian, Brăila

V.051 Se consideră șirul de numere naturale 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, … , unde fiecare număr natural nenul n apare de n ori.

a) Să se determine al 2006-lea număr care apare în acest șir.

b) Notând cu S suma primelor 2006 numere din acest șir, să se studieze dacă S+3 poate fi pătrat perfect.

Problemă selectată și prelucrată de Prof. Laura Marin , Galați

V.052 Pentru a și b numere naturale, a < b, se consideră mulțimea M(a, b) = $\{x\in N\ /\ a\le x\le b\}$ și se notează cu card(a, b) numărul elementelor mulțimii M(a, b). Dacă S = card(1, 2) + card(2, 4) + card(3, 6) + … + card(1003, 2006), să se arate că S este multiplu de 17.

Prof. Viorel Ion , Galați

V.053 Arătați că numărul natural

$1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+...+2005^{2006}+2006^{2006}+2$ nu poate fi pătrat perfect.

Problemă selectată și prelucrată de Prof. Laura Marin,Galați

V.054 Vârsta Oanei împreună cu vârsta lui Bogdan și dublul vârstei lui Vlad este 44 de ani.

Știind că vârsta lui Bogdan este cu 4 ani mai mică decât a Oanei, iar vârsta lui Vlad este cu 2 ani mai mare decât a lui Bogdan, să se afle ce vârstă are fiecare.

Prof. Tudor Deaconu, Reșița

V.055 Aflați suma numerelor mai mici decât 1000 care împărțite la 5 dau restul 3.

Prof. Marius Șandru, Reșița

V.056 Se dau numerele $A=4^{3n+2}-8^{2n+1}-64^n, n\in\mathbb{N}$ și $B=2^{2006}-2^{2005}-2^{2004}, n\in\mathbb{N}$. Aflați cea mai mică valoare a lui n pentru care B divide pe A.

Prof. Marian Bădoi, Oravița

V.057 Dacă a , b, c, d sunt numere naturale astfel încât a < b < c , găsiți câte triplete (a , b , c) satisfac egalitatea : $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=\overline{ddd}$?

Prof. Adriana Dragomir , Oțelu-Roșu

V.058 Să se arate că oricare ar fi m $\in$ **N** există n,a,b,c $\in$ **N** astfel încât $4\cdot 289^m+17^n=a^2+b^2+c^2$

Prof. Mariana Drăghici , Reșița

V.059 Care dintre numerele

a = $2005^{2006}+2006^{2005}$ și b = $2005^{2005}+2006^{2006}$ este mai mare ?

Prof. Mariana Drăghici , Reșița

Clasa a VI-a

VI.049 Aflați numărul natural $\overline{abc}$, scris în baza 10, știind că:

$$10\cdot\left(\frac{\overline{ab}}{c}-1\right)+\frac{\overline{bc}}{a}=82.$$

Prof. Nicolae Stănică, Brăila

VI.050 a) Să se arate că între oricare două puteri naturale consecutive ale lui 3 se află cel puțin o putere a lui 2.

b) Există două puteri naturale consecutive ale lui 3 între care să găsim trei puteri distincte ale lui 2?

Prof. Marius Damian, Brăila

VI.051) Două unghiuri complementare au măsurile în grade egale cu **a** și **b** ($a;b\in N^*$) direct proporționale cu numerele prime p_1 și p_2 .

Dacă $\dfrac{a+b}{p_1+p_2}$ este număr natural par, determinați măsurile celor două unghiuri.

Prof. Cecilia Solomon,Galați

VI.052 Comparați fracțiile: $\dfrac{2006+11^{614}}{2006+5^{921}}$ și $\dfrac{2005+10^{2109}}{2005+11^{1406}}$

Prof. Mariana Iancu, Oravița

VI.053 Se consideră unghiurile adiacente AOC și BOC astfel încât $[OA\perp[OB$ și $[OA]\equiv[OB]$. Fie unghiul drept $\sphericalangle COD$ neadiacent unghiului $\sphericalangle BOC$ cu $[OC]\equiv[OD]$. Arătați că: a) $[AC]\equiv[BD]$

b) unghiurile AOD și BOC au aceeași bisectoare.

Prof. Marius Șandru, Reșița

VI.054 Aflați numerele $\overline{abc}$ scrise în baza 10 știind că sunt îndeplinite simultan condițiile :

1) a + b este număr prim ;

2) $a^2+b^2=c^2$;

3) 2a + 6b + 9c se divide cu 3 .

Prof. Marian Bădoi , Oravița

VI.055 Trei vânzători au caiete cu același preț.Primul a mărit prețul cu 20% și apoi l-a micșorat cu același procent, al doilea a micșorat mai întâi prețul cu 20% și abia apoi l-a mărit cu același procent iar al treilea a lăsat prețul neschimbat. De la care vânzător ai cumpăra acum și de ce?

Olimpiadă Vaslui 2006

VI.056 2006 puncte distincte au fost fixate pe mai multe segmente obținându-se 2198 de segmente.Câte segmente au fost la început ?

Prof.Vasile Șerdean , Gherla

VI.057. Fie numărul : $N=\frac{3\cdot(\overline{aab}+\overline{bba})\cdot(\overline{ab}+\overline{ba})}{407}$

a) Arătați că numărul N este pătrat perfect ,unde a și b sunt cifre în sistemul zecimal.

b) Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare a numărului N.

c) Aflați valorile lui N care se divid cu 24.

Prof.Groza Ioan , Turda

VI.058. Determinați numerele întregi x , y care satisfac

$$\frac{x}{y+1}=\frac{y}{x-1}=\frac{5}{x+y}$$

Prof. Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

VI.059 Găsiți un număr natural care este produs a 6 numere prime consecutive și pentru care suma divizorilor proprii primi este 41.

Prof. Dana Emilia-Schiha,Berzasca

Clasa a VII-a

VII.049 Fie triunghiul ABC, I centrul cercului său înscris și $AI\cap BC=\{D\}$. O dreaptă perpendiculară pe dreapta AI intersectează (AB) și (AC) în punctele P și respectiv Q, iar M și N $(M\in(BD),\ N\in(DC))$ sunt simetricele punctelor P și Q față de dreptele BI și respectiv CI. Să se demonstreze că $[MD]\equiv[DN]$ dacă și numai dacă $[AB]\equiv[AC]$.

Prof. Marius Damian, Brăila

VII.050 Să se determine cel mai mic număr natural format din 30 de cifre care are suma cifrelor 30 și se divide la 30.

Gazeta Matematică

VII.051 Fie $m,n\in\mathbb{N}$. Să se arate că dacă

$$a=\frac{3n+4}{2n+3}+\frac{5m+8}{2m+3}\in\mathbb{N},$$ atunci a=4.

Prof. Marius Damian și prof. Nicolae Stănică, Brăila

VII.052 a)Arătați că pătratul oricărui număr natural este de forma $3k$ sau $3k+1, k\in\mathbb{N}$

b) Determinați numerele prime p și q, $p<q$ astfel încât $p^2+q^2=298$

Prof. Marius Golopența, Băile Herculane

VII.053 Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $\sphericalangle A\equiv\sphericalangle C$. Dacă $M\in(AC)$ astfel încât (DM) și (BM) sunt bisectoare ale unghiurilor ADC respectiv ABC, se cere:

a) demonstrați că $BD\perp AC$

b) bisectoarele celor patru unghiuri ale patrulaterului sunt concurente.

Prof. Irina Avrămescu, Reșița

VII.054. Fie un triunghi oarecare ABC și M $\in$ (BC), N $\in$ (AC), P $\in$ (AB) astfel încât MN $\perp$AB, PM $\perp$ AC și PN $\perp$BC.
Demonstrați că M, N și P sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC.

Olimpiadă Vaslui 2006

VII.055 În triunghiul ABC o mediană este perpendiculară pe o bisectoare.Lungimile laturilor sunt trei numere naturale consecutive. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

Prof.Vasile Șerdean , Gherla

VII.056 Fie $0,a_1a_2a_3....$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{6}+\frac{7}{13}$.

Determinaţi a_{2005}.

* * *

VII.057. Fie M şi N mijloacele laturilor [DC] şi respectiv [AD] ale pătratului ABCD iar CN ∩ BM={P}.Arătaţi că: $BM \perp CN$

Prof.Simona şi Cristian Pop,Cluj-Napoca

VII.058 Determinaţi numerele întregi x , z care satisfac :

$$5x^2-3xy+y^2=5.$$

Prof. Lucian Dragomir , Oţelu-Roşu

VII.059 Fie triunghiul *ABC* şi *I* centrul cercului său înscris. Notăm cu *M*, *N* mijloacele laturilor *AB*, respectiv *AC* şi cu *P*, *Q* intersecţiile dreptei *MN* cu dreptele *BI*, respectiv *CI*.

Ştiind că $BC=10\ cm$ şi $AB+AC=18\ cm$, să se calculeze lungimea segmentului *PQ*.

Prof. Marius Damian, Brăila

Clasa a VIII-a

VIII.049. Fie unghiul $\sphericalangle XOY$, cu $m\left(\sphericalangle XOY\right)=\alpha^0=$ constant, $0<\alpha<90$, *P* un punct variabil în interiorul unghiului $\sphericalangle XOY$, nesituat pe bisectoarea acestuia, *M* şi *N* simetricele lui P faţă de *OX* şi *OY*. Ducem $PS\perp OM$, $S\in OM$, $PR\perp ON$, $R\in ON$, $PS\cap OX=\{H\}$, $PR\cap OY=\{T\}$.

a) Demonstraţi că $NT\parallel MH$.

b) Arătaţi că $m\left(\sphericalangle PMH\right)+m\left(\sphericalangle PNT\right)=$ constantă.

Prof. Carmen Botea, Brăila

VIII.050 Fie triunghiul ABC şi I centrul cercului său înscris. Notăm cu M şi N mijloacele laturilor AB şi respectiv AC, iar cu P şi Q intersecţiile dreptei MN cu dreptele BI şi respectiv CI. Ştiind că $\mathrm{PQ}=\frac{\mathrm{AI}}{2}$, să se demonstreze că $\mathrm{m}\left(\sphericalangle\mathrm{PAQ}\right)=30^0$.

Prof. Marius Damian, Brăila

VIII.051 Să se demonstreze că ecuatia : $x^{4n}=y^{2n-1}+z^{2n+1}$, are o infinitate de soluţii in mulţimea numerelor naturale .

Prof. Dorin Mărghidanu, Corabia

VIII.052 Se consideră trapezul ABCD, $AB\parallel CD, AB>CD.$ Fie M mijlocul laturii AD, N mijlocul laturii AB, P mijlocul laturii CD şi $\{Q\}=MN\cap CD.$

a) Arătaţi că dreptele BD şi NQ sunt paralele.
b) Aflaţi valoarea raportului dintre aria triunghiului MNP şi aria trapezului ABCD.

Prof. Marius Şandru, Reşiţa

VIII.053 Câte numere de patru cifre $\overline{a_1a_2a_3a_4}, a_1\neq 5$ au proprietatea că numărul $N=a_1+4a_2+3a_3-a_4$ se divide cu 13?

Prof. Stăniloiu Nicolae, Bocşa

VIII.054 Să se determine numerele pozitive a_1,a_2 pentru care $a_1+a_2=1$ şi $\sqrt{(1+a_1)\cdot(1+a_2)}+\sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)}$ este număr natural.

prof. N. Dragomir, T.Deaconu, Reşiţa

VIII.055 Să se arate că dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A şi $AD\perp BC, D\in(BC)$, atunci $\frac{AB+AC+AD}{2}<BC$.

Prof. Marius Şandru, Reşiţa

VIII.056 Fie $x,y,z,$ numere pozitive cu $x\cdot y\cdot z=1.$ Demonstraţi inegalitatea: $\frac{x+y}{x^2+y^2}+\frac{y+z}{y^2+z^2}+\frac{z+x}{z^2+x^2}\le\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$

Prof. Marius Damian, Brăila

VIII.057 Fie a, b, c numere reale pozitive care satisfac egalitatea: $a^2+b^2+c^2=1$. Să se arate că: $a+b+c-a^3-b^3-c^3\ge 6abc$

Stăniloiu Ovidiu, elev Bocşa

VIII.058. Fie [ABCD] un tetraedru regulat având lungimea muchiei 1 şi AE înălţimea din A a triunghiului ABC, $E\in[BC]$. Să se calculeze distanţa dintre dreptele AE şi BD.

Stăniloiu Ovidiu, elev Bocşa

VIII.059 Fie a o rădăcină a ecuaţiei $x^2-7x+1=0$. Să se calculeze

$$a^2+\frac{1}{a^2} \text{ şi } a^3+\frac{1}{a^3}.$$

Prof. Mariana Drăghici , Reşiţa

Clasa a IX-a

IX.044 . Pentru orice funcție f : . și orice număr natural m notăm A_m = { x / f (x) = m } .

Spunem că o funcție f : . este o funcție ***simplă*** dacă pentru orice m , mulțimea A_m are cel mult două elemente .

a) Demonstrați că nu există funcții ***simple*** f cu proprietatea că:

$$x\cdot f(x)+f(-x)=x+1\ ,\quad x\ ;$$

b) Determinați funcțiile ***simple*** f care satisfac :

$$x\cdot f(x)+(1-x)\cdot f(-x)=x+1\ ,\quad x\ .$$

Prof. Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

IX.045 Să se rezolve în **R** ecuația: $\{x\}^{2007}-[x]^{2007}-x^{2007}=0$

Prof. Carmen Botea, Brăila

IX.046 Pe laturile (AB) , (BC) și (CA) ale triunghiului ABC se consideră punctele M ,N , respectiv Q astfel încât AM = BN = CP .

Demonstrati că dacă triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate , atunci ABC este triunghi echilateral .

Prof. Nicolae Stăniloiu , Bocșa

IX.047 Fie a , b care satisfac $2(a+10)^2+4(b+1)^2=5b^2+6a^2$

Arătați că dacă a + b 21 , atunci $5b^2+6a^2=2006$.

Adriana și Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

IX.048 Dacă numerele naturale a și b satisfac $a+2a^2=b+3b^2$, arătați că a – b este pătrat perfect .

Adriana și Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

IX.049 Fie f : * . * o funcție cu proprietatea că

$$f(m+n)\le f(m)+f(n)\ ,\quad m\ ,\ n\ ^*.$$

(a) Demonstrați că: $f(1)+\frac{1}{2}\cdot f(2)+...+\frac{1}{n}\cdot f(n)\ge f(n)$, n

(b) Determinați funcțiile f : * . * pentru care avem egalitate în inegalitatea de la (a) .

Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

IX.050 Se consideră o funcție f : . care are proprietățile :

a) $f(xy)=f(x)+f(y)$, x , y ;

b) $f(n)=0$ pentru orice n care are suma cifrelor egală cu 10 .

Calculați f (2006) . Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

IX.051 Determinați numerele întregi x , y , z , t care satisfac :

$$\begin{cases} x+y+z=t^2 \\ x^2+y^2+z^2=t^3 \end{cases}$$

Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

Clasa a X-a

X,044 Dacă a , b , c , d ∈ (0 , ∞) , să se demonstreze că:

$$\frac{a^4}{bcd}+\frac{b^4}{cda}+\frac{c^4}{dab}+\frac{d^4}{abc}\ge a+b+c+d$$

Prof. dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

X.045 Rezolvați ecuația : $2^x+2^{[x]}+2^{\{x\}}=3$

Prof. Felix Arhire , Galați

X.046 a) Stabiliți care dintre următoarele numere este mai mare :

$a=\log_9 6$ sau $b=\log_{12} 8$;

b) Determinați perechile (x , y) de numere întregi care satisfac :

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_2 y=\dfrac{x+y}{2} \\ 2^x-2^y=y^2-x^2 \end{cases}$$

Prof. Lucian Dragomir , Oțelu-Roșu

X.047. Rezolvați: $7^{2x}+7^{3x}+...+7^{nx}+\frac{(n-1)\cdot n}{2}=7^x\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{2}$, $n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2$,.

Prof. Nicolae Dragomir , Prof. Tudor Deaconu , Reșița

X.048 Se consideră un cerc $\mathcal{C}$ de centru O și ABC un triunghi oarecare în planul cercului , iar D este mijlocul laturii (BC) .

a) Determinați un punct M (AD) pentru care suma

$S=MA^2+MB^2+MC^2$ este minimă;

b) Determinați un punct N $\mathcal{C}$ pentru care suma

$T=NA^2+NB^2+NC^2$ este minimă.

Prof. Nicolae Stăniloiu , Bocșa

X.049 Numim ***graf*** (neorientat) o mulțime finită de puncte numite noduri/vârfuri și mulțimea perechilor de puncte (neordonate) [x_i,xj].

Notăm: G = { {x_1, x_2,…, x_n,},{[x_i,xj] i, j ∈ 1...n }}

Într-un graf, un lanț este o succesiune de vârfuri (minim două) alese astfel încât oricare două vârfuri succesive definesc o muchie [x_i,xj], iar în succesiunea de muchii au fiecare un punct comun.{ [x_i,x_{i+1}], [x_{i+1},x_k] [x_k,x_l]…}

Literele cuvântului **LAN** alcătuiesc un graf cu10 vârfuri.Vârfurile grafului sunt alese dintre vârfurile a trei pătrate alăturate , de latura 1 şi mijloace ale segmentelor.

a) Care este suma lungimilor segmentelor din care este format cuvântul **LAN?**
b) Câte lanturi se pot defini în graf ?
c) Care este lungimea lanţului care trece prin toate punctele grafului?
d) În subgraful de 5 vârfuri care lanţ are lungimea minimă ?

Prof. Mircea Iucu, Reşiţa

X.050. Câte perechi (m ,n) de numere naturale nenule satisfac :

$$\left(\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}}\right)^m\cdot\left(\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}\right)^n=x^5\ ,\quad x\quad 0\ ?$$

Prof. Lucian Dragomir , Oţelu-Roşu

X.051. . Fie z_1,z_2,z_3,z_4 patru numere complexe. Să se arate că dacă există z_0 a.î. $|z_1-z_0|=|z_2-z_0|=|z_3-z_0|=|z_4-z_0|$ atunci numărul:

$\dfrac{z_2-z_1}{z_4-z_1}\cdot\dfrac{z_4-z_3}{z_2-z_3}$ este real. Prof.Nicolae Stăniloiu,Bocşa

Clasa a XI-a

XI.044 Fie A∈$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A^3=27I_n$ şi $\det(A-3I_n)\neq 0$.Calculaţi $\det(A+3I_n)$. Prof. Viorel Botea, Brăila

XI.045 Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuaţia: $X\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5&9\\7&13\end{pmatrix}$

Prof.Dan Negulescu,Brăila

XI.046 Fie n∈N* şi M mulţimea matricelor pătratice de ordinul n, inversabile în $M_n(R)$, având elementele în mulţimea {1, 2, 3, …, 2006}. Să se arate că mulţimea M are un număr par de elemente.

prof. Marian Baroni , Galaţi

XI.047 Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2&2006\\0&2\end{pmatrix}$. Determinaţi matricele X $\mathcal{M}_2(\ )$ care satisfac egalitatea : $X^{2005}+X=A.$

Prof. Nicolae Dragomir , Prof. Tudor Deaconu , Reşiţa

XI.048 Fie A,B $\mathcal{M}_3(\ )$ cu det(A)=det(B) =1.Arătaţi că $C=A+\sqrt{3}\cdot B$ e matrice inversabilă. Prof. Antoanela Buzescu , Caransebeş

XI.049 Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[n^3+2n]}{[n]^3+2[n]}$

Prof. Antoanela Buzescu , Caransebeş

XI.050 Determinaţi limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_1>2\ ,\quad (1+x_n{}^2)\cdot x_{n+1}=2x_n{}^2-x_n+1\ ,\quad n\qquad ,\ n\quad 1\ .$$

Prof. Lucian Dragomir , Oţelu-Roşu

XI.051 Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietăţile $\det(A-3I_2)=4$ si $\det(A+2I_2)=9$. Să se determine $\left(A-I_2\right)^n$ pentru $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

Prof. Năchilă Petre,Ploieşti

Clasa a XII-a

XII.044 Fie H un subgrup al unui grup G astfel încât G – H are 2006 elemente.

a) Să se arate că G are cel mult 4012 elemente;
b) Să se construiască un exemplu de subgrup H cu 2006 elemente al unui grup cu exact 4012 elemente.

prof. Marian Baroni , Galaţi

XII.045 Fie $(G,*)$ un grup abelian şi $a\in G$. Definim pe G operaţia φ_a astfel: $x\varphi_a y=x*y*a,\ \forall x,y\in G$. Fie $H=\{\varphi_a\,|\,a\in G\}$. Să se arate că:

a) (G,φ_a) este un grup abelian;

b) (G,φ_a) si (G,φ_b) sunt grupuri izomorfe $\forall a,b\in G$;

c) pe mulţimea H se poate defini o lege de compoziţie $\perp$ astfel încât $(H,\perp)$ să fie un grup şi acest grup să fie izomorf cu grupul $(G,*)$.

Prof. Apostolescu Cezar,Ploieşti

XII.046 Calculaţi primitivele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Olimpiadă Prahova,2006

XII.047 Fie (G, ·) un grup finit cu p elemente (p∈N, prim). Să se demonstreze că dacă f :G→G este un morfism astfel încât există x∈G-{e}, cu f(x)=x, atunci f=1_G. Olimpiadă Vaslui 2006

XII.048 Determinaţi o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(0) = 0, ştiind că admite o primitivă F astfel încât F(x) + f(x) = sinx, oricare ar fi x∈ $\mathbb{R}$.

Olimpiadă Vaslui 2006

XII.049. Studiați primitivabilitatea funcției f : (-1,1) → R,

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin x + arctg\,\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in (-1,1) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Olimpiadă Cluj 2006

XII.050 Fie (G, •) un grup cu elementul neutru e.

1) Dacă $x^2 = e$, $\forall x \in G$, arătați că grupul este comutativ.

2) Dacă G este finit, comutativ și $x^2 = e$ pentru mai mult de jumătate din elementele lui G arătați că $x^2 = e$, $\forall x \in G$.

Prof. V. Lupșor , ISJ Cluj , Prof.A. Macovei C.N. G. Coșbuc Cluj

XII.051 Fie f : [0,1] → [0,1] o funcție primitivabilă și F o primitivă strict crescătoare a lui f pe [0,1] cu proprietatea că F(0) = 0. Arătați că

$\exists c \in (0,1)$ astfel încât $F(c) = \left(\dfrac{1}{2c} - \dfrac{c}{2}\right) \cdot f(c)$.

Prof. M. Bojescu , L.T. A. Iancu,Cluj-Napoca

Rubrica rezolvitorilor

– punctaje realizate pentru soluțiile problemelor din RMCS nr. 16 (în paranteză apare punctajul total realizat pentru concurs); cei care nu apar nu au trimis soluții sau nu au respectat termenul

Clasa a III-a (din 15 septembrie a IV-a):

Liceul Hercules Băile Herculane (înv. Floarea Kuszai) : Șandru Ilie Daniel 112(185) , Dobreanu Răzvan 103(172) , Lozovanu Dumitru 134(234) , Croitoru Ioana Sabina -,(95) ; (înv.Doina Zah) Tîrîk Bogdan 117(217) , Daniel Coman 125(210) , Mihart Georgiana 126(226) , Dancău Anca 126(226) , Dimcea Ana-Maria-Alexandra –(100) , Gherghina Liviu-Nicu 97(185) , Ferescu Liana-Maria 125(220) , Domilescu Manuel-Ilie 118(210) ,Ciopec Oana 123(123)

Școala nr. 1 Oravița (înv. Merima Velcotă) : Pîrvu Ancuța Iulia – ,(67)

Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeș (înv. Monica Pelin , Monica Urban) : Lala Timotei –(70) , Iordache Andreea-Claudia-,(100) , Băzăvan Cătălina 87(157) , Băzăvan Răzvan 67(137) , Bojin Călina Milica-, (67)

Liceul Traian Doda Caransebeș (înv. Marinela Galescu) : Dragomir Ioana-Ștefania 80(177) , Mura Ana-Maria –(82) , Moraru Dragoș –(50) , Suru Alexandru Răzvan-(86) , Coste Anastasia –(97) , Voicu Vlad –(97)

Școala Generală 2 Reșița (inst.Ozana Săcărin) : Lăcătușu Georgiana 42(42)

Clasa a IV-a(din 15 septembrie a V-a) :

Școala Bănia (înv. Cristian Pirtea) : Odobașa Daniel 158(251)

Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeș (înv. Pelin Monica , Monica Urban) :Leon Natalia-Emilia 60 ,
(inst. Mirela Tătar) : Pantiș Antonia 100 , Șerbescu Andreea 78 , Neuman Liviu 98 , Cernescu Sebastian 100 , Pop Silvia 115 ,

Liceul Traian Doda Caransebeș (înv. Elena Cîrstea) : Szabo Ildiko 149(244)

Școala Generală 1 Oravița (înv.Liliana Crăciun) : Serafin Dennis George 104(104)

Școala Generală 2 Reșița (inst. Ozana Săcărin , înv. Ana Modoran , înv. Georgeta Gaiță, înv.Mărioara Popescu) :
Bîtea Flavius – (20) , Dieaconu Estera 53(96) , Sașec Ion Cosmin 35(61) , Bălu Lorena –(20), Baierle Amalia 65(85) , Izvernar Daniel Otniel 45(72) , Banța Nicolae Alex 37(57) , Barbu Bogdan-(98) , Ungurean Simona Roxana -(28) , Wettori Michael Sebastian –(100) , Balasan Roberta Andreea-(65) , Rogge Petra-Ana 126(226) , Șeudan Adina-(100) , Drăghici Livia-Liliana 133(233) , Tomescu Alina-Nicoleta-(100) ,Uzoni Ribana-Alexandra (100) , Dăescu Andrei (100) ,Brebenariu Octavia-Patricia (100) , Mregea Natalia Patricia (100) , Blaga Georgiana (100) , Popa Andreea 99(199) , Onofrei Iulia 27(97) , Borchescu Daiana Maria 37(76) , Zăria Gergiana (60) , Bolfă Larisa (30) , Aghescu Monica Elena 134(234) , Darie Mădălina Mihaela (70) , Lungu Cosmin (30) , Țoțu Mădălina (88) , Toader Alexandra Anastasia (40) , Țarga Robert (80) , Toader Teodora (40) , Nicorici Bogdan (100) , Marin Remus 93(93),Ruja Iulia Maria 118(118),Pălie Lorena 54(54),Oancă Maria Alexandra 54(54).

Școala Generală 9 Reșița (înv. Adina Belu)
Peptan Alexandru-Florin 136(236) , Grădinaru Adelina 98 , Arusoaiei Iulian 98 , Manciu Bogdan 99 , Nedelea Adrian-Gabriel 95 , Lazăr Silviu – Ioan 178(298) , (inst. Mariana Mitrică) : Muscai Lorena 145(243)

Clasa a V-a (clasa a VI-a din toamnă):

Școala nr.1 Anina (prof. Manuela Skopecs):
Rotaru Ana-Maria (40) , Drăgilă Patricia (79) ,Vrînceanu Cezar (35) , Sârghie Bianca (56)

Liceul Hercules Băile Herculane (prof.Marius Golopența):
Iacobici Pavelina (30) , Anton Alexandru Lucian (83) (trimite toate problemele într-un singur plic !) , Tabugan Călina Dana (139) , Lolea Sandra (68) , Muică Grozăvescu Mihaela (48) ,Popeangă Raluca

Ștefania (132) , Basarabă George (126) , Martin Patricia (17) ,Mâncescu Maria-Manuela(28) , Cernea Alexandra (15)
Școala Bozovici (prof.Iosif Găină) :
Bratosin Felix (65),Barbeș Cezara (55) , Păunescu Alexandra (55) ,Băin Daiana (25) , Băcilă Cristiana (67)
Școala nr.2 Caransebeș (prof. Corîci Carina):
Agape Oana Gabriela 180(354) , Bădăluță Alexandru 57(153) , Bărbuceanu Florina (122) , Margan Anuța Roxana 144(144),Dumitrașcu Andreea 147(295).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeș (prof.Marița Mirulescu)
Sâsâeac Iulia Irina 154(231) , Tătar Octavian 147(282) , Ion Răzvan (120) , Vela Silviu 65(131) , Antonescu Ionica Nicoleta (38) , Timofte Tina 129(204)
Liceul Traian Doda Caransebeș (prof.Adrian Dragomir):
Stoicănescu Gelu (165) , Rada Cristiana 143(300) , Keleti Edith 143(286) , Stepanescu Mihai (80) , Burciu Daniel (36) , Pușchiță Daniel (80)
Școala nr.1 Moldova-Nouă (prof. Marioara Radosavlevici)
Gîrjan Laura Nicoleta (74) , Craiovan Andreia Dana (77)
Școala Ciclova Română (prof. Geta Mîșcoi)Bănuc Vasilică–Angel (40)
Școala Generală 2 Reșița (prof.Mariana Drăghici):
Meșter Amalia (87) , Mihăilă Flavius (41) , Moș Daria (46) , Cernea Serena 164(221) , Scutaru Lavinia (15) , Radcu Antonia (50) , Moldovanu Alina (33) , Irina Ciorogar 185(252) , Pascu Andra Diana 214(333),Florea Niki-Alexandru 167(167).
Școala nr. 1 Oravița (prof. Camelia Pîrvu) : Pelian-Popa Ioana 110(139)
Grup Școlar Industrial Oțelu-Roșu (prof.Adriana Dragomir) :
Dumitresc Cecilia Grațiela (143), Albai Cosmin (72) , Dragomir Claudiu (63) , Nasta Laura (145) , Gemănariu Trăienică (56) .
Școala Generală 1 Oțelu-Roșu (prof.Amalia Popa):Bușă Anamaria 54(54)
Școala Generală nr.3 Oțelu-Roșu (prof.Boldea Felicia) :
Buzuriu George (113)
Școala Rusca-Teregova (prof.Ciucă Sorin) :
Stepanescu Georgeta Mihaela 23(41), Codoșpan Florinela 42(146),Milu Ionela 28(47),Banda Traian Dani 75, Humiță Maria 42(86) ,Blaj Marinela Alisa 44(140) , Berzescu Nicolae (22) , Davidescu Toma (38) , Curmei Roxana Andreea(24)

Școala Vîrciorova (prof. Ioan Liuba) : Măran Marius 57(165),Gașpar Nicolae 136(136).

Clasa a VI-a(a VII-a din 15 septembrie)

Grup Școlar Anina (prof. Petrișor Neagoe) : Gîrjan Oana Nicoleta (10) , Radu Bianca 50(60).
Școala nr. 1 Anina (prof. Marin Constantin Cleșiu) :
Borcean Andreas (38) , Juraszic Claudia (40) .
Școala Bozovici (prof. Maria Bololoi) : Borchescu Ana Maria 52(122) , Petre Estera Alina (70) , Borozan Florina Elisaveta 34(123).
Fără menționa clasa : Hehea Adina Elena 51(51) (n-am descifrat numele bine)
Liceul Traian Doda Caransebeș (prof.Delia Dragomir):
Szabo Cristian 218(287) , Mocanu Ioana Dora 204(281), Peia Vigia Alexandra (50)
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeș (prof.Dorina Humița):
Pleșko Cosmin Peter (28) , Semenescu Anca 213(373) ,Borcean Gheorghe (63) ,Bob Cristiana (57) ; (prof. Marița Mirulescu), Todorovici Lucian (45) , Vladu Cristian (76) , Matei Sergiu (30),Antonescu Ionica Nicoleta 14(14)
Școala nr.2 Caransebeș (prof. Corîci Carina): Antoce Alexandru 125(222)
Colegiul Național Carol I Craiova (prof. Monica Stanca) Stanciu Ioan (113)
Liceul de Artă Reșița (prof.Adriana Mara) :Goicovici Denisa (72)
Școala Generală 9Reșița (prof. Irina Avramescu) :
Kormos Nicholas 47(80).
Școala Rusca-Teregova (prof.Ciucă Sorin):
Pașan Petru 100(226) , Lințu Florin Cosmin (64) ,Blaj Ilie Dănuț (68) , Vernicuța Petronela (63) , Stepanescu Elisabeta (34) , Banda Vasile (36) , Banda Ionela Mitra (43) , Dumitrică Eva Daniela (31) , Stancu Ana Maria (9) , Berzescu Maria (32) , Humiță Ana (15) , Stan Stana (8)
Școala Generală nr. 1 Oțelu-Roșu (prof.Heidi Feil , Cecon Iulia): Duma Andrei (133) , Bistrian Florina (55) , Ivu Nicoleta (65) .

Clasa a VII-a(a VIII-a din 15 septembrie)

Școala nr.1 Anina (prof. Manuela Skopecs):
Golîmba Pavelina-Adelina (20) , Cleșiu Marian Cătălin (60) , Tatar Santra Sorina(16)

Școala nr.2Anina (prof. Nicolae Seracin) : Busa Bianca(10)
Școala Rusca-Teregova (prof.Ciucă Sorin) :Stepanescu Ana Patricia 32(32), Humiță Toma (29) , Iciu Gheorghe (35) , Stepanescu Mihai (27) , Raduia Ștefan (31) , Gherga Ionuț-Barbu (40) , Banda Anca (23) , Stepanescu Ianăș(32) , Moacă Ion(16) , Rădoi Georgeta (42) , Gherga Petru (29) , Popa Petru-Ionuț (42) , Banda Iosif (21) ,Dumitrică Octavian (17) ; (prof.Ilie Damian) : Ciucă Cristian Sorin 80(148)
Liceul Hercules Băile Herculane (prof. Constantin Bolbotină) : Păleanu Oana Georgiana (10), Dimcea Ion-Cristian (97)
Școala Berzovia (prof. Dan Miholcea) : Chisăliță Alexandra 35(75)
Liceul Traian Doda Caransebeș (prof.Delia Dragomir): Novăcescu Dorin 76(161) , Zanfir Cristian 148(208),Vid Cristina(70) , Baneu Petru 65(145),Galescu Dan 63(63)
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeș (prof.Diana Hurduzeu) : Prunar Victor 334(544).
Școala Generală 2 Reșița (prof.Marius Șandru): Meșter Sergiu (30)
Liceul de Artă Reșița (prof.Adriana Mara) : Cherloabă Edith (77)
Școala Generală nr. 1 Oțelu-Roșu (Prof. Heidi Feil) : Atinge Carina (107) , Cococeanu Oana Maria (125)
Școala Generală nr. 3 Oțelu-Roșu (prof.Felicia Boldea): Ștefănigă Sebastian (65) , Lazăr Dinu (58) , Silianovici Alin (46) , Bărângă Sergiu (69)

Clasa a VIII-a(adică prima clasă de liceu de la toamnă)

Școala Dalboșeț (prof.Pavel Rîncu) : Pițigane Elena Diana 110(110)
Școala Rusca-Teregova (prof.Ciucă Sorin) : Codoșpan George (48) , Humiță Maria – Mirabela(26) , Gherga Patricia (26) , Stepanescu Anca-Liliana (25),Stepanescu Adamescu Ioan (32) , Humiță Elisabeta (33) , Cobel Ștefania Ionela (25) , Gherga Constantin (30) , Banda Ioan (12) , Banda Maria (25) , Gherga-Blaj Elisabeta-Ionica (24).
Școala Generală nr. 2 Bocșa (prof. Veronica Todor) : Stăniloiu Ovidiu 130(285).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeș (prof.Lavinia Moatăr): Milcu Roxana 210(332) , Timofte Andrei 163(231) , Cristescu Loga Cella (60) , Moatăr Alexandra 131(211) , Vlad Adina 215(404) , Megan Ligia 56(111) , Ploștinaru Diana 40
Școala Generală nr. 3 Oțelu-Roșu (prof.Felicia Boldea): Lupu Vlad 107 (107)

Clasa a IX-a(a X-a din 15 septembrie)

Liceul Hercules Băile Herculane (prof.Marius Golopența): Feneșan Manuela 55(121) , Caraiman Gabriela Sofica 40(106).
Liceul Teoretic Eftimie Murgu Bozovici (prof.George Pascariu): Șuveți Pavel (9).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeș (prof.Lavinia Moatăr): Kremer Emanuela (83) , Gurgu Caius 39(103) , Iliescu Marcel (28) .
Liceul General Dragalina Oravița (prof. Mihai Lazarov) : Nezbeda Harald (42) , Rășinariu Lucian 53(133)
Grup Școlar Industrial Oțelu-Roșu (prof.Lucian Dragomir): Ungură Dragoș 115(221), Dragomir Lucia 80(125) , Buzuriu Alina 50(102) , Popa Roxana 50(95) , Muntean Cristian 50(95) .

Clasa a X-a(a XI-a din toamnă)

Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeș (prof.Marița Mirulescu): Labo Laurențiu 109(154),Roată Ramona (21) , Mărgan Larisa (23) , Munteanu Laura Loredana (35) , Stănilescu Maria (29) , Colțan Anca (26) , Bămescu Monica (23) , Cornean Cristian(25) , Beja Ancuța (36) , Ciortan Oana (35) , Ionescu Alin (25)
Liceul Traian Doda Caransebeș (prof.Lavinia Moatăr) : Zoican Andrei (23) , Voinea Alexandra 54(129) , Cărăbaș Florentina Angela (68) , Dochin Luminița 50(118) , Mutuleanu Alexandra 21(78) , Cuțitoi Simina 8(104) , Petruș Laura 57(157) , Aghescu Loredana (73) , Guțulescu Oana 22(113) , Burghelea Bogdan (43) , Piele Ionuț 22(70) (prof. Delia Dragomir) : Beldie Anca 157(215) , Iacob Alexandra 56(126) , Frățilă Alina-Alexandra 47(120).
Liceul Traian Lalescu Reșița (prof.Ovidiu Bădescu) : Popovici Doru Adrian Thom 167(167)
Grup Școlar Industrial Oțelu-Roșu (prof.Lucian Dragomir): Istodor Cosmin 106(160) , Ciobanu Constantin,zis Costel (42).

Clasa a XI-a(a XII-a din toamnă)

Liceul Teoretic Traian Doda Caransebeș (prof.Lavinia Moatăr):Enache Bianca Emilia (36) , Mureșan Viorel Dan (40) , Gherghinuță Florin (40)