

Deoarece $\Delta = 1 - 4 < 0 \Rightarrow -x^2 + x - 1 < 0; \forall x \in \mathbb{R}$, așadar intervalul

de condiții este $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$

$(x-2)(1-x) = 0 \Leftrightarrow$ rădăcinile: $x_1 = 2; x_2 = 1$

Folosim tabelul de semne pentru a determina semnul fracției

x	$-\infty$	-1	1	2	∞
$x-2$	-----	-----	-----	0++++	++++
$1-x$	+++++	+++++	0-----	-----	-----
$x+1$	-----	-0+++++	+++++	+++++	+++++
$-x^2+x-1$	-----	-----	-----	-----	-----
$F(x)$	-----	-/+++++	0-----	-----	0++++

așadar soluția este: $x \in (-\infty, -1) \cup [1, 2]$

Problema 8 Să se arate că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem:

e) $2^2 + 6^2 + \dots + (4n-2)^2 = \frac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$

f) $1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

g) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$

Problema 9 Să se arate că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem:

a) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

c) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

Problema 10 Să se arate că:

a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \forall n \geq 2$

b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1, \forall n \geq 1$

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \forall n \geq 1$

Soluție parțială:

b) I. $P(1)$: deoarece primul termen este $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ iar ultimul este

$\frac{1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{4}$, cum regula șirului este că numitorii cresc din 1 în 1,

atunci $P(1): \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 \cdot 12 \Leftrightarrow \frac{13}{12} > 1$, relație adevărată

II. Presupunem ca $P(k)$ e adevărată și vrem să demonstrăm că $P(k+1)$ e adevărată, unde .

$P(k): \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+1} > 1$

$P(k+1): \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+4} > 1$

Știm $P(k)$ -adevărată, construim membrul drept din $P(k+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+1} > 1 \left| - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+4} > 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$

Folosind tranzitivitatea : Dacă $a > b$ și arătăm că $b > c$, atunci $a > c$,

e suficient să demonstrăm că: $1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} > 1 \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3(k+1)} + \frac{1}{3k+4} > 0 \Leftrightarrow$

$\frac{-3(3k+2)(3k+4) + 3(k+1)(3k+4) + (3k+2)(3k+4) + 3(k+1)(3k+2)}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)} > 0 \Leftrightarrow$

$\frac{-27k^2 - 18k - 36k - 24 + 9k^2 + 21k + 12 + 9k^2 + 18k + 8 + 9k^2 + 15k + 6}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)} > 0, \text{ adevărat, așadar}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} > 1, \text{ deci } P(k+1)$$

adevărată $\Rightarrow P(n)$ adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Problema 11 Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$ avem:

b) $(7^n - 1):6$

c) $(6^{2n-1} + 1):7$

d) $(9^{n+1} - 8n - 9):16$

e) $(7^{2n} - 1):48$

f) $(10^n + 18n - 28):27$

g) $(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}):17$

h) $(3^{2n+2} - 2^{n+1}):7$.

Soluție parțială:

f) I.P(0): $(10^0 + 18 \cdot 0 - 28) : 27 \Leftrightarrow (1 - 28) : 27 (A)$

II.Presupunem $P(k)$ adevărată și vrem să demonstrăm $P(k+1)$

adevărată, unde $P(k): (10^k + 18k - 28):27$

$P(k+1): (10^{k+1} + 18(k+1) - 28):27$

Stim: $(10^k + 18k - 28):27$

Notăm: $10^k + 18k - 28 = 27c \Rightarrow 10^k = 27c - 18k + 28 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{k+1} = 10(27c - 18k + 28) \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{k+1} + 18k + 18 - 28 = 270c - 180k + 280 + 18k - 10 =$

$= 270c - 162k + 270 = 27(10c - 6k + 10):27 \Rightarrow$ deci $P(k+1)$

adevărată $\Rightarrow P(n)$ adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Problema 12:

Calculați primii trei termeni ai șirurilor următoare:

a) $a_n = 1 + 2 + \dots + n$

b) $b_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2$

c) $c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

d) $d_n = (-2)^{n+1}$

Problema 13:

Studiază monotonia și mărginirea șirurilor următoare:

a) $a_n = n + 1, n \geq 1$

b) $b_n = \frac{n-1}{n+1}, n \geq 1$

c) $b_n = \frac{n+2}{n+1}, n \geq 1$

Problema 14: a) Verificați dacă a_n este progresie aritmetică unde

$n \geq 1$ pentru: (i) $a_n = 3n - 4$ (ii) $a_n = n^2 + 2$

b) Calculați a_7 dacă a_n este progresie aritmetică care verifică

relațiile: (i) $\begin{cases} a_5 = 12 \\ a_{19} = 40 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2a_5 - 3a_2 + a_{10} = 42 \\ a_3 \cdot a_5 = 112 \end{cases}$

c) Calculați pentru progresiile determinate mai sus suma primilor 7 termeni, $S_7 = ?$

d) Decideți dacă sunt progresii aritmetice șirurile ce au suma primilor n termeni dată de:

(i) $S_n = 2^n + 1$ (ii) $S_n = n^2 + 2n$ (iii) $S_n = n^2 + 2n + 3$

Problema 15: a) Verificați dacă b_n e progresie geometrică unde

$n \geq 1$ pentru (i) $b_n = \frac{3^{n+1}}{4^n}$ (ii) $b_n = 1 + 5^n$

b) Calculați b_7 dacă b_n e progresie geometrică ce verifică

relațiile: (i) $\begin{cases} b_5 = 16 \\ b_{11} = 1024 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21 \\ b_2 + b_3 + b_4 = 42 \end{cases}$

c) Calculați pentru progresiile determinate mai sus suma primilor 7 termeni, $S_7 = ?$

d) Decideți dacă sunt progresii aritmetice șirurile care au suma primilor n termeni dată de: (i) $S_n = 2^n - 1$ (ii) $S_n = 2^n + 1$.